

COLLECTION φ +

M. ELYAZNASNI
S. HAMDOUNE
M. JAMAL
M. MOUSSETAD



TOME 3

Exercices résolus d'électrostatique

- Rappels -

Compléments Mathématiques

- Premières Années 1er Cycle Universitaire
- Années Préparatoires Aux Grandes Ecoles

DANS LA MEME COLLECTION

Des mêmes auteurs

Tome. 1 / Exercices résolus de cinématique du point matériél.

Tome. 2 / Exercices résolus de dynamique du point matériel.

Tome. 3 / Exercices résolus d'électrostatique.

Tome. 4 / Exercices résolus d'électrocinétique et de magnétostatique.

Tome. 5 / Exercices résolus de thermodynamique

Dépôt légal N° 307/1995

ISBN : 9981-25-032-5 (ensemble)
ISBN : 9981-25-034-1 (Tome 3)

PREFACE

La collection φ^{+} (phi-plus); composée de 5 tomes s'adresse aux étudiants de première année scientifique et technique de l'enseignement supérieur et aux élèves des années préparatoires aux concours des grandes écoles.

Chaque tome comporte d'une part une progression d'exercices résolus permettant la compréhension et l'assimilation du cours et d'autre part des exercices avec seulement des réponses et des suggestions en vu de développer chez l'étudiant l'esprit de raisonnement scientifique et de le préparer à l'examen.

De plus, on trouvera dans les tomes 1, 3 et 5 des rappeles et compléments mathématiques, suivis d'exercices, simples et concrets, avec solutions, nécessaires à la résolution du problème de physique.

Les auteurs

M. Elyaznasni

S.Hamdoune

M. Jamal

M. Moussetad

(Enseignants chercheurs à la Faculté des Sciences 2. Sidi Othmane -Casablanca-)

ETUSUP
.com

TOME : 3

Exercices résolus d'électrostatique
Table des matières

RAPPELS ET COMPLEMENTS MATHEMATIQUES

I - SYSTEMES DE COORDONNEES

I - 1. Coordonnées cartésiennes

a) Définition

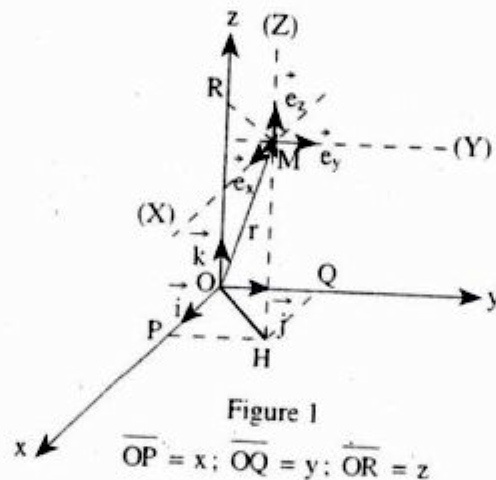


Figure 1

$\overline{OP} = x$; $\overline{OQ} = y$; $\overline{OR} = z$

Soient trois axes Ox, Oy et Oz dont les vecteurs sont respectivement $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$

Les coordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace correspondent aux projections du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les trois axes.

Remarques

1 - Lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont le même module, le repère est dit normé.

2 - Si de plus, les axes Ox, Oy et Oz sont deux à deux perpendiculaires, le repère est dit orthonormé.

3 - Oxyz est un trièdre orthonormé direct, si la plus petite rotation qui amène Ox sur Oy se fait dans le sens trigonométrique direct autour de Oz.

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ forme une base : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) Courbes de coordonnées (figure. 1)

Une courbe de coordonnée (C.C) est une ...

- C.C de x : est la droite (X) parallèle à OX passant par M.
- C.C de y : est la droite (Y) parallèle à OY passant par M.
- C.C de z : est la droite (Z) parallèle à OZ passant par M.

c) Base locale

Elle est formée de trois vecteurs unitaires tangents aux trois courbes de coordonnées. Les vecteurs sont orientés dans le sens croissant de la variable associée.

La base locale au point M est formée par les trois vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, orthogonaux deux à deux, comme le montre la figure 1.



d) Elément de volume

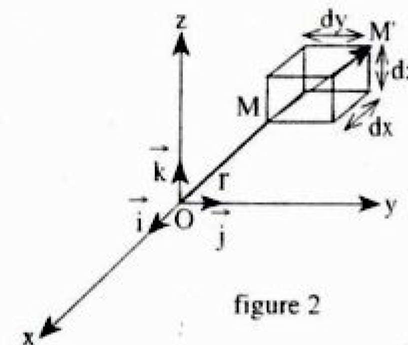


figure 2

C'est un parallélépipède dont chaque côté correspond à la variation infinitésimale d'une seule coordonnée, comme le montre la figure 2.

$$dV = dx \,.\, dy \,.\, dz$$

e) Elément de déplacement

C'est un vecteur dont les composantes sont les côtés de l'élément de volume (figure 2).

$$\vec{dl} = \overrightarrow{MM'} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

f) Elément de surface

Deux composantes du vecteur déplacement élémentaire déterminent une surface élémentaire normale à un vecteur

$dS_x = dy \cdot dz$ $(x = cte)$: surface normale à $\vec{e}_x$

$dS_y = dx \cdot dz$ $(y = cte)$: surface normale à $\vec{e}_y$

$dS_z = dx \cdot dy$ $(z = cte)$: surface normale à $\vec{e}_z$

g) Notions sur les intégrales doubles

Soit (C) une courbe fermée et f(x, y) une fonction à deux variables (x, y) définie et continue à l'intérieur de (C).

$\iint f(x, y)\, dx\, dy$ désigne une intégrale double qu'on lit somme double de f(x, y) dx dy, étendue au domaine limité par le contour (C).

Partageons le domaine par des parallèles à oy, telle que RPQ. Nous obtenons ainsi des petites bandes PQQ'P' que nous découpons ensuite en petits rectangles par des parallèles à Ox (voir figure 3).

Soient dx et dy les côtés d'un rectangle infiniment petit entourant un point M (x, y) de surface égale à dx dy.

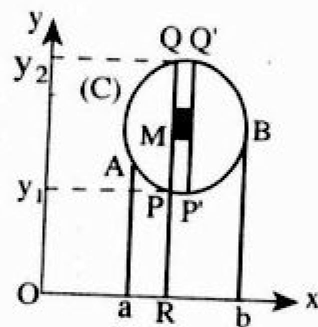


Figure 3

La quantité f (x, y) dx dy est le produit de la surface du rectangle par la valeur que prend la fonction au point M (x, y).

Définition

L'intégrale double considérée est la limite vers laquelle tend la somme de tous ces produits lorsque le nombre des rectangles augmente indéfiniment, chacun d'eux tend vers zéro, de manière à remplir toute l'...

Comment calculer cette intégrale double ?

On suppose d'abord que x et dx constants. La seule variable est alors y; et quand les éléments de surface remplissent la petite bande PQQ'P', y varie de y_1 (ordonnée de P) à y_2 (ordonnée de Q). On obtient ainsi la somme:

$\sum f(x, y) dx\, dy = dx\, [\sum f(x, y) dy]$ (car dx est constant).

Et par définition une intégrale simple :

$$\sum f(x, y)\, dx\, dy = dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

Remarquons que y_1 et y_2 sont des fonctions de dx de sorte que l'intégrale $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$ est elle - même une fonction de x, soit $\varphi(x)$. On peut donc mettre la somme $\sum f(x, y)\, dy$ sous la forme $\varphi(x)\, dx$.

Il ne nous reste plus qu'à balayer le domaine avec des bandes analogues à PP'QQ', en faisant varier x entre a (abscisse de A) et b (abscisse de B). Cette somme $\sum \varphi(x)\, dx$ est encore une intégrale simple soit $\int_a^b \varphi(x)\, dx$.

En remplaçant $\varphi(x)$ par sa valeur, on obtient finalement l'expression de l'intégrale double : $\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$

On voit donc que l'on doit calculer d'abord l'intégrale écrite à droite, puis intégrer ensuite par rapport à x.

I - 2. Coordonnées cylindriques

a) Définition

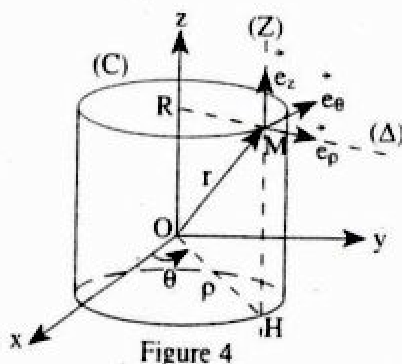


Figure 4

La position du point M est déterminée à l'aide des variables ρ, θ et z. ρ, θ et z s'appellent les coordonnées cylindriques de M.

$$M \begin{cases} \rho = OH, & \rho \geq 0 \\ \theta = (\widehat{Ox, OH}), & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = HM, & -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

b) Courbes de coordonnées (figure 4)

- Courbe de ρ : c'est la demi-droite (Δ) passant par M et d'origine R.
- Courbe de θ : c'est le cercle (C) horizontal, de rayon ρ ayant le point R comme centre et passant par M.
- Courbe de z : c'est la droite (Z) passant par H et M.

c) Base locale (figure 4)

La base locale en M est : $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$\vec{e}_\rho$ est porté par la demi-droite (Δ) et dirigé suivant les ρ croissants.

$\vec{e}_\theta$ est tangent au cercle (C) suivant les θ croissants.

$\vec{e}_z$ est suivant la droite HM, dans le sens des z croissants.

d) Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques

$$x = \rho\cos\theta\ ; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho\sin\theta\ ; \quad \theta = \text{arc tg}\frac{y}{x}$$
$$z = z\ ; \quad z = z$$

e) Elément de volume

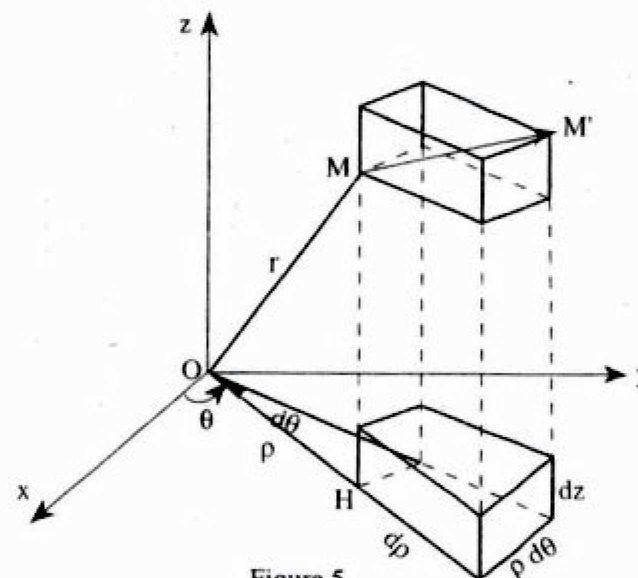


Figure 5

$$dV = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

f) Elément de déplacement (figure 5)

$$\vec{dl} = \overrightarrow{MM'} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\, d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$$

g) Elément de surface

$dS_\rho = \rho\, d\theta\, dz \quad (\rho = c^{te})$: surface normale à $\vec{e}_\rho$

$dS_\theta = d\rho\, dz \quad (\theta = c^{te})$: surface normale à $\vec{e}_\theta$

$dS_z = \rho\, d\rho\, d\theta \quad (z = c^{te})$: surface normale à $\vec{e}_z$

I - 3. Coordonnées sphériques

a) Définition

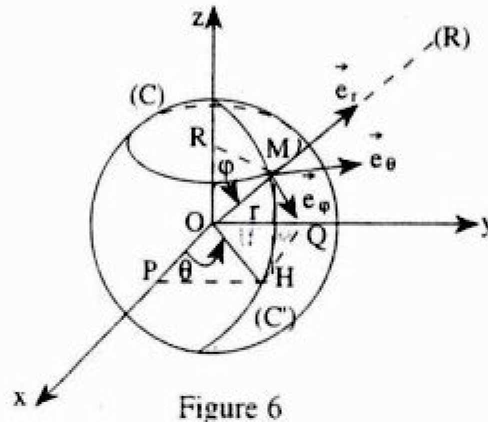


Figure 6

La position du point M est déterminée à l'aide des variable r, θ et φ.

r, θ et φ s'appellent les coordonnées sphériques de M.

$$M \begin{cases} r = OM, & r \geq 0 \\ \theta = (\widehat{Ox, OH}), & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \varphi = (\widehat{Oz, OM}), & 0 \leq \varphi < \pi \end{cases}$$

b) Courbes de coordonnées (figure 6)

• Courbe de r : c'est la demi - droite (R) d'origine O et passant par M.

• Courbe de θ : c'est le cercle (C) horizontal de centre R passant par M et de rayon r sin φ

• Courbe de φ : c'est le demi - cercle (C') vertical de centre O passant par M et de rayon r.

c) Base locale (figure 6)

La base locale en M est : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$\vec{e}_r$ est radial suivant les r croissants.

$\vec{e}_\theta$ est tangent au cercle horizontal (C) suivant les θ croissants.

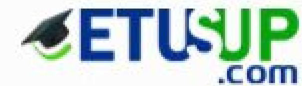
$\vec{e}_\varphi$ est tangent au demi - cercle vertical (C') suivant les

d) Relations entre les coordonnées cartésiennes et sphériques.

$$x = r \sin\varphi \cos\theta; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r \sin\varphi \sin\theta; \quad \varphi = \text{arc tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$z = r \cos\varphi; \quad \theta = \text{arc tg} \frac{y}{x}$$



e) Elément de volume

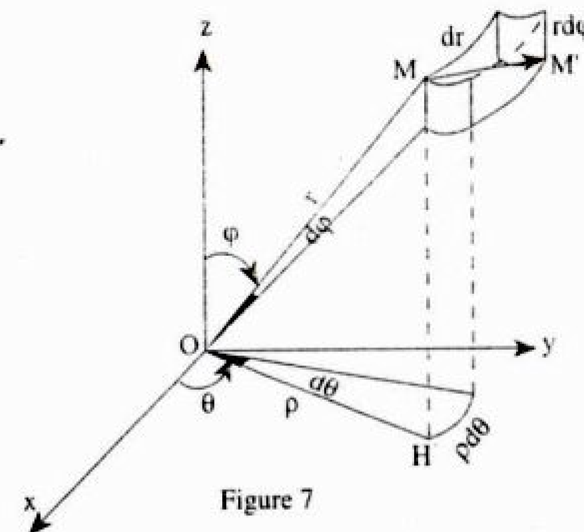


Figure 7

$\overrightarrow{OH}$ est la projection de $\vec{r}$ sur le plan oxy : $\rho = r \sin\varphi$.

$$dV = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

f) Elément de déplacement (figure 7)

$$\vec{dl} = \overrightarrow{MM'} = dr\,\vec{e}_r + r \sin\varphi \, d\theta \, \vec{e}_\theta + r\, d\varphi \, \vec{e}_\varphi$$

g) Elément de surface

$dS_r = r^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi$ (r = cte) : surface normale à $\vec{e}_r$.

$dS_\theta = r \, dr \, d\varphi$ (θ = cte) : surface normale à $\vec{e}_\theta$.

$dS_\varphi = r \sin\varphi \, dr \, d\theta$ (φ = cte) : surface normale à $\vec{e}_\varphi$.

II - CHAMPS SCALAIRES ET CHAMPS VECTORIELS

II - 1. Définitions

a) Champ scalaire

Un champ scalaire est une fonction de plusieurs variables qui, à chaque point M de l'espace fait correspondre un scalaire f(M) = f (x, y, z).

Exemple : la température.

b) Surface de niveau ou équipotentielle

Une surface de niveau est une surface où la fonction scalaire a la même valeur.

c) Champ vectorial

Un champ vectoriel est une fonction vectorielle de plusieurs variables qui à chaque point M de l'espace fait correspondre un vecteur $\vec{V}(M)$

$$\vec{V}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Exemple : la vitesse des points d'un corps animé d'un mouvement de rotation.

d) Ligne de champ ou ligne de force

Une ligne de champ est une courbe telle qu'en tout point le champ vectoriel lui est tangent.

e) Tube de champ

C'est un ensemble de lignes de champ.

II - 2. Opérateur Nabla $\vec{\nabla}$

a) Définition

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

C'est l'expresion de $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes.

b) Application

On peut appliquer l'opérateur $\vec{\nabla}$ soit à un scalaire soit à un vecteur.

• scalaire : $\vec{\nabla} . f = \overrightarrow{grad}\, f$, appelé gradient de f, c'est un vecteur.

• vecteur : $\vec{\nabla} . \vec{V} = \mathrm{div}\, \vec{V}$, appelé divergence de $\vec{V}$, c'est un scalaire.

$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{rot}\, \vec{V}$, appelé rotationnel de $\vec{V}$, c'est un vecteur.

II - 3. Gradient

a) Définition

Le gradient d'une fonction scalaire f est un vecteur qui relie la variation df à l'élément de déplacement $\vec{dl}$ le long duquel f subit cette variation.

$$\vec{df} = \overrightarrow{grad}\, f . \vec{dl}$$

b) Signification physique

montre la direction avec laquelle le champ f croît le plus rapidement.

c) Expressions

voir tableau 1 (page 22)

II - 4. Divergence

a) Flux d'un champ vectoriel

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{V}$ à travers une surface quelconque S est : $\Phi_S(\vec{V}) = \iint_S \vec{V} d\vec{S}$

$d\vec{S}$ est un vecteur normal à la surface S.

b) Définition

Soit une surface S fermée entourant un point M. S limite le volume v. La div $\vec{V}$ au point M est définie par :

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \lim_{v \to 0} \frac{\iint_S \vec{V}\, d\vec{S}}{v} = \lim_{v \to 0} \frac{\Phi_S(\vec{V})}{v}$$

c) Signification physique

La fonction divergence exprime la présence de sources qui créent le champ vectoriel considéré.

Exemple : Les charges électriques sont les sources du champ électrique $\vec{E}$.

d) Expressions

Voir tableau 1 (page22)

II - 5. Rotationnel

a) Circulation d'un champ vectoriel

Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel et (C) une courbe quelconque. La circulation de $\vec{V}$ le long de (C) est :

$\mathscr{C}_c(\vec{V}) = \int_c \vec{V}.d\vec{l}$; $d\vec{l}$: élément de déplacement sur C

b) Définition

Soit une courbe (C) fermée entourant un point M. (C) limite la surface S. La composante normale du vecteur $\overrightarrow{rot}\,\vec{V}$ à la surface S au point M est :

$$(\overrightarrow{rot}\,\vec{V})_n = \lim_{S \to 0} \frac{\int_c \vec{V}\, d\vec{l}}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{\mathscr{C}_c(\vec{V})}{S}$$

c) Signification physique

La fonction rotationnelle exprime la présence de tourbillons qui créent le champ vectoriel considéré.

Exemple : les courants électriques sont des tourbillons du champ magnétique $\vec{B}$.

d) Expressions

Voir tableau 1 (page 22).

TABLEAU 1	Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
$\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}U$	$E_x=\frac{\partial U}{\partial x}$; $E_y=\frac{\partial U}{\partial y}$; $E_z=\frac{\partial U}{\partial z}$	$E_\rho=\frac{\partial U}{\partial \rho}$; $E_\theta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}$; $E_z=\frac{\partial U}{\partial z}$	$E_r=\frac{\partial U}{\partial r}$; $E_\theta=\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial U}{\partial \theta}$; $E_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$
$\overrightarrow{\text{div}}\ \vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right)+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\varphi . A$
$\vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$	$E_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}$ $E_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}$ $E_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$	$E_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}$ $E_\theta=\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$ $E_z=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right]$	$E_r=\frac{1}{r\sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_\theta\sin\varphi\right)-\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}\right]$ $E_\theta=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\varphi\right)-\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]$ $E_\varphi=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}-\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta)\right]$
ΔU	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sin\varphi\,\partial U}{\partial \varphi}\right)$

$\overrightarrow{\text{rot}}\ (\overrightarrow{\text{grad}}\ U) = 0$
$\text{div}\ (\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}) = 0$
$\overrightarrow{\text{rot}}\ U\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\ U \wedge \vec{A} + U\,\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$
$\text{div}\ U\vec{A} = \vec{A}\,\overrightarrow{\text{grad}}\ U + U\,\text{div}\ \vec{A}$
$\overrightarrow{\text{rot}}\ (\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{A} - \Delta\vec{A}$
$\text{div}\ (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}\,\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} - \vec{A}\,\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}$

TABLEAU 2

ENONCES DES EXERCICES

E 1 Soit un segment AB, M un point quelconque de ce segment.

a - Déterminer les coordonnées du point M sachant que $\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}$, avec k un nombre réel différent de 1.

b - En déduire les coordonnées du point I, milieu de AB.

E 2 Soient deux points dans l'espace. A (x_1, y_1, z_1) et B (x_2, y_2, z_2).

a - Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b - Calculer la distance AB.

E 3 Quelle est la condition nécessaire et suffisante d'alignement de trois points : $M_1\ (x_1, y_1)$, $M_2\ (x_2, y_2)$ et $M_3\ (x_3, y_3)$?

E 4 Représenter la surface définie par :

$$z = c, \quad a < x < a + 2 \quad \text{et} \quad b < y < b + 3.$$

(a, b, c des constantes positives). Calculer son aire.

E 5 On définit les coordonnées polaires comme un cas particulier des coordonnées cylindriques avec z = 0. Le vecteur $\vec{V}$ s'exprime dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$: $\vec{V} = \vec{V}_\rho \vec{e}_\rho + \vec{V}_\theta \vec{e}_\theta$

1) Exprimer $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{i}$.

2) Ecrire $\vec{V}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

E 6 Représenter la surface définie par :

$$\rho = R \quad \text{et} \quad 0 < z \leq h.$$

Calculer son aire.

E 7 Représenter la surface définie par : $\theta = \frac{\pi}{6}$. θ coordonnée cylindrique

E 8 Donner l'expression de $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

E 9 Représenter la surface définie par :

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad 0 < r \leq a.$$

Calculer son aire.

E 10 Représenter la surface définie par $r = a$.

Calculer son aire.

E 11 Calculer $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$

E 12 Démontrer les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f + g) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f + \overrightarrow{\text{grad}}\,g$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f \cdot g) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f$$

E 13 1- Soit un champ scalaire U(r) ne dépendant que de r, on dit qu'il est à symétrique sphérique. Montrer que son gradient est radial.

2 - Calculer : $\overrightarrow{grad}\ r$, $\overrightarrow{grad}\ \frac{k}{r}$, k une constante.

E 14 Calculer le flux de $\vec{E} = \frac{a}{\rho}\vec{i}$ (a = constante) à travers une surface cylindrique d'axe Oz, de rayon R et de hauteur h.

E 15 Calculer le flux d'un champ de vecteur $\vec{V}$ uniforme à travers un disque de rayon R. $\vec{V}$ fait un angle α avec la normale au disque.

E 16 Calculer la divergence du champ $\vec{E}$ défini par :

$$\vec{E}\begin{cases}\frac{a\,v}{r^2}\vec{e}_r & \text{si } r \neq 0\\ 0 & \text{si } r = 0\end{cases}$$

a est une constante, v est un volume quelconque limité par une surface S . r est une coordonnée sphérique.

E 17 1 - Calculer le rotationnel du champ $\vec{E}$ définie par :

$$\vec{E}\begin{cases}\frac{k}{r^2}\vec{e}_r & \text{si} \quad r \neq 0\\ 0 & \text{si} \quad r = 0\end{cases}$$

k est une constante et r une coordonnée sphérique.

2 - En déduire la circulation de $\vec{E}$.

E 18 Calculer la circulation : $\int_c 4xy\,dx - x^2dy$

suivant la branche de parabole dont l'axe de symétrie est l'axe Oy, dont les extrémités ont pour coordonnées O(0,0) et A(2,1).

E 19 Les champs suivants sont - ils créés par des sources ou par des tourbillons ?

$\vec{E}_1 = ax\vec{i}$, $\vec{E}_2 = ax\vec{j}$, $\vec{E}_3 = r^2\vec{E}_r$,

$\vec{E}_4 = r\vec{e}_\theta$, $\vec{E}_5 = \overrightarrow{grad}\ (\text{Log}\rho)$

r : coordonnée sphérique

ρ : coordonnée cylindrique.

E 20 Quelle est la condition pour que le champ vectoriel $\vec{E} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ soit créé par des sources ?

E 21 Montrer que le champ vectotiel $\vec{E} = \frac{a}{r^2}\vec{e}_r$ dérive d'un potentiel U, que l'on déterminera.

E 22 Quel est l'angle solide Ω sous lequel on voit un disque, de centre O et de rayon R, depuis un point M de son axe ? avec a = OM.

E 23 Quel est l'angle solide Ω' sous lequel on voit, depuis le point M, la calottte sphérique qui s'appuit sur le disque (D) de l'exercice 22, et centrée au point M.

SOLUTIONS DES EXERCICES

I - Systèmes de coordonnées

S 1 a)

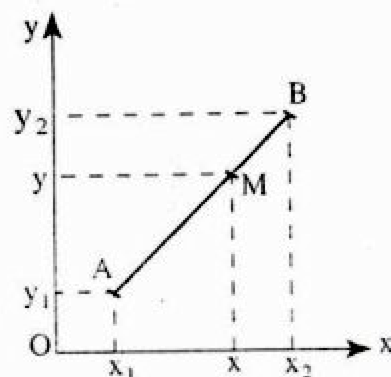


Figure 8

$\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} = k\,(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OM}(k-1) = k\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$(x\vec{i} + y\vec{j})(k-1) = k\,(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})$

$$= (k x_2 - x_1)\vec{i} - (k y_2 - y_1)\vec{j}$$

d'où

$$x = \frac{k x_2 - x_1}{k-1} \quad \text{et} \quad y = \frac{k y_2 - y_1}{k-1}$$

b) I milieu de AB, donc $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $k = -1$, on en déduit

$$x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

S 2 a) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ \overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

b) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

S 3 Pour que ces trois points soient alignés, il faut que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ soient colinéaires.

$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

$\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j}$

$\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ colinéaires, si il existe λ, $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{V_1} = \lambda\overrightarrow{V_2}$.

donc $x_2 - x_1 = \lambda\,(x_3 - x_1)$ et $(y_2 - y_1) = \lambda\,(y_3 - y_1)$

d'où $$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$

La condition d'alignement est donc :

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

S 4

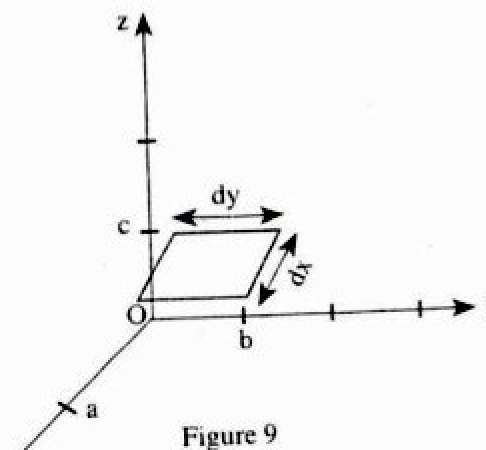


Figure 9

La surface est un parallélogramme de côtés dx et dy, se trouvant dans le plan parallèle à Oxy, à la cote z = c.

$$dS_z = dx \,.\, dy$$

$$S_z = \int_a^{a+2} dx \int_b^{b+3} dy$$

$S_z = 6$ unité d'aire

S 5 1)

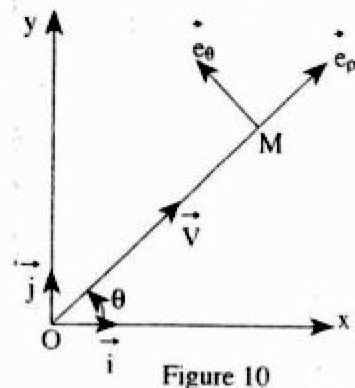


Figure 10

$$\vec{e}_\rho = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}$$

Les formules inverses sont :

$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{j} = \sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

2) Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}$

Dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$: $\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta$

V_ρ : composante radiale.

V_θ : composante othoradiale.

$$\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta$$

$$= V_\rho(\cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}) + V_\theta(-\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j})$$

$$= (V_\rho \cos\theta - V_\theta \sin\theta)\,\vec{i} + (V_\rho \sin\theta + V_\theta \cos\theta)\,\vec{j}$$

d'où :

$$V_x = V_\rho \cos\theta - V_\theta \sin\theta \quad \text{et} \quad V_y = V_\rho \sin\theta + V_\theta \cos\theta$$

S 6

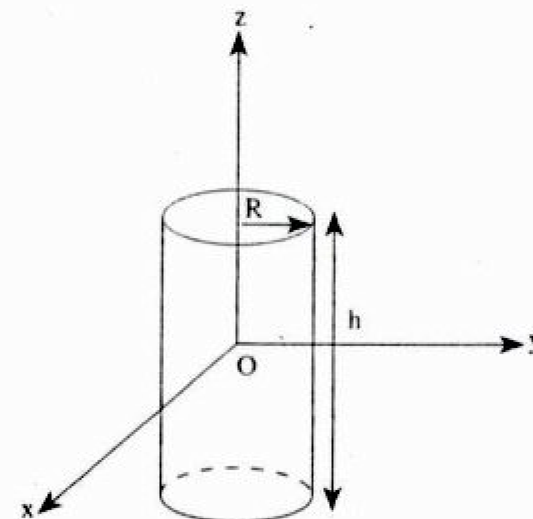


Figure 11

C'est la surface latérale du cylindre.

$$dS_\rho = \rho\, d\theta\, dz \qquad (\rho = cte = R)$$

$$S_\rho = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \quad \text{soit} \quad S_\rho = 2\pi\ Rh$$

S 7

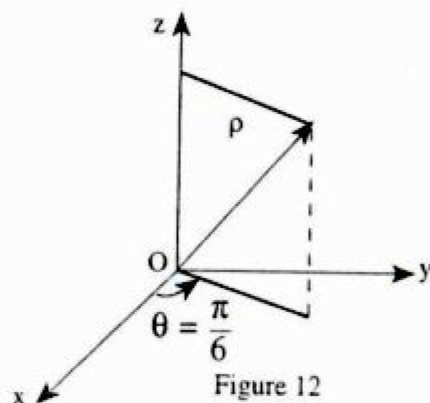


Figure 12

$dS_\theta = d\rho \, . \, dz$: c'est le plan axial.

S 8 En coordonnées cartésiennes, l'élément de déplacement est : $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

$x = r \sin\varphi \cos\theta$,

$dx = \sin\varphi \cos\theta \, dr + r \cos\varphi \cos\theta \, d\varphi - r \sin\varphi \sin\theta \, d\theta$

$y = r \sin\varphi \sin\theta$,

$dy = \sin\varphi \sin\theta \, dr + r \cos\varphi \sin\theta \, d\varphi + r \sin\varphi \cos\theta \, d\theta$

$x = r \cos\varphi$, $\quad dz = \cos\varphi \, dr - r \sin\theta \, d\varphi$

$$d\vec{l} = (\sin\varphi \cos\theta \, \vec{i} + \sin\varphi \sin\theta \, \vec{j} + \cos\varphi \, \vec{k}) \, dr$$

$$+ (r \cos\varphi \cos\theta \, \vec{i} + r \sin\theta \cos\varphi \, \vec{j} - r \sin\varphi \, \vec{k}) \, d\varphi$$

$$+ (- r \sin\varphi \sin\theta \, \vec{i} + r \sin\varphi \cos\theta \, \vec{j}) \, d\theta$$

$$= dr \, \vec{e}_r + r \sin\varphi \, d\theta \, \vec{e}_\theta + r \, d\varphi \, \vec{e}_\varphi$$

On tire alors

$$\vec{e}_r = \sin\varphi \cos\theta \, \vec{i} + \sin\varphi \sin\theta \, \vec{j} + \cos\varphi \, \vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \cos\varphi \, \vec{j} - \sin\varphi \, \vec{k}$$

S 9

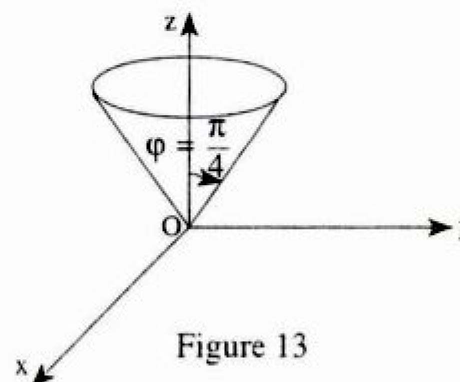


Figure 13

La surface est un cône

$$dS_\varphi = r \sin\varphi \; dr \; d\theta \qquad (\varphi = \text{cte})$$

$$S_\varphi = \sin\varphi \int_0^a r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \, a^2 \sin\varphi$$

or

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \qquad \text{d'où} \quad S_\varphi = \pi \, a^2 . \frac{\sqrt{2}}{2}$$

S 10

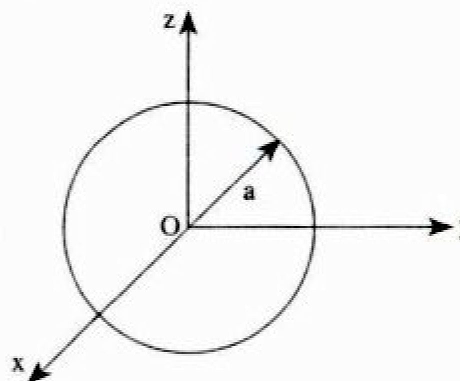


Figure 14

La surface est la zone sphérique. Une sphère de rayon a.

$$dS = r^2 \sin\varphi \; d\theta \; d\varphi \qquad (r = \text{Cte})$$

$$S_r = a^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$S_r = 4\pi a^2$$

S 11 Avec $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ d'où

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 = \Delta$$

Δ est un nouvel opérateur appelé le Laplacien.

II - Champs scalaires et champs vectoriels

S 12

$$\overrightarrow{grad}\,(f+g) = \frac{\partial(f+g)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(f+g)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(f+g)}{\partial z}\vec{k}$$

$$= \overrightarrow{grad}\,f + \overrightarrow{grad}\,g$$

$$\overrightarrow{grad}\,(f\,.\,g) = \frac{\partial(fg)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(fg)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(fg)}{\partial z}\vec{k}$$

$$= f\,\overrightarrow{grad}\,g + g\,\overrightarrow{grad}\,f$$

S 13 1 - En coordonnées sphériques :

$$\vec{A} = \overrightarrow{grad}\ U = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$A_\theta = A_\varphi = 0 ;\ A_r = \frac{dU}{dr} \text{ et } \overrightarrow{grad}\ U = \frac{dU}{dr}\vec{e}_r$$

il est donc radial.

2 - $\overrightarrow{grad}\ r = \vec{e}_r$ et $\overrightarrow{grad}\ \frac{k}{r} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$

S 14

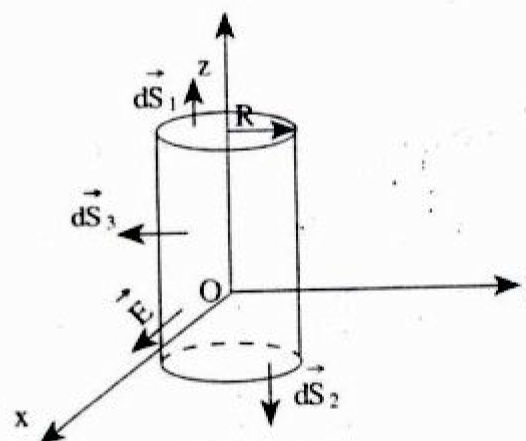


Figure 15

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\,d\vec{S}$$

Le flux est linéaire par rapport à S, donc :

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{E}\,d\vec{S_1} + \iint_{S_2} \vec{E}\,d\vec{S_2} + \iint_{S_3} \vec{E}\,d\vec{S_3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} \perp d\vec{S_1} ;\ \vec{E}\,.\,d\vec{S_1} = 0 \\ \vec{E} \perp d\vec{S_2} ;\ \vec{E}\,.\,d\vec{S_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi = \iint_{S_3} \vec{E}\,d\vec{S_3}$$

$$\Phi = \iint_{S_3} \frac{a}{\rho}\,\vec{i}\ \rho\,d\theta\,dz\,\vec{e}_\rho = a\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta \int_0^h dz = 0$$

S 15

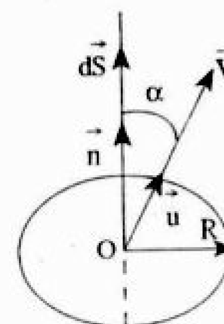


Figure 16

$$\Phi = \iint_s \vec{V}\, d\vec{S} = \iint_s V\,\vec{u}\,.\, dS\,.\,\vec{n} = V \iint_s \cos\alpha\, dS$$

$$= V \iint_s \cos\alpha\;\; dS = V\cos\;\alpha \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho\, d\rho$$

$$\Phi = \pi R^2 V \cos\alpha$$

S 16 • **1er cas : $r \neq 0$**

$\vec{E}\,(r)$ est dérivable, donc en coordonnées sphériques :

$\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r)$; tous les autres termes sont nuls.

Or $E_r = \dfrac{av}{r^2} \Rightarrow \text{div}\,\vec{E} = 0$, le champ est à flux conservatif.

• **2e cas : $r = 0$**

$\vec{E}\,(\,r\,)$ n'est pas dérivable, on a dans ce cas

$$\text{div}\,\vec{E} = \lim_{v \to 0} \frac{\int_s \vec{E}\, d\vec{S}}{v} = \lim_{v \to 0} \frac{\Phi_S(\vec{E})}{v}$$

On prend comme surface S, la surface d'une sphère infinitésimale de rayon ε.

$$\Phi_S(\vec{E}) = \iint_s \vec{E}\, d\vec{S} = \iint_s \frac{av}{\varepsilon^2}\vec{e}_r\,.\, dS\,\vec{e}_r$$

$$= \frac{av}{\varepsilon^2}\iint S = \frac{av}{\varepsilon^2}\,.\,4\,\pi\,\varepsilon^2 = 4\pi\, av$$

$$\text{div}\,\vec{E} = \lim_{v \to 0} \frac{\Phi_S(\vec{E})}{v} = \lim_{v \to 0} \frac{4\pi\, av}{v} \quad \text{et} \quad \text{div}\,\vec{E} = 4\pi\, a$$

Le champ $\vec{E}$ est donc créé par des sources qui se trouvent au point O.

S 17 • **1er cas : $r \neq 0$**

Voir tableau 1 $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})_n = \lim_{S \to 0} \frac{\int_C \vec{E}\, d\vec{l}}{S}$$

C : c'est une courbe fermée qui limite S.

On prend comme courbe (C), un cercle infinitésimal de rayon ε.

En coordonnées polaires,

$d\vec{l} = \varepsilon\, d\theta\, \vec{e}_\theta$, d'où $\vec{E}\,.\,d\vec{l} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

2 - D'après le théorème de Stokes :

$$\iint_s \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\, d\vec{S} = \int_C \vec{E}\,.\,d\vec{l} = 0 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \;\; \forall\, S.$$

$$\int_C \vec{E}\,.\,d\vec{l} = 0$$

S 18

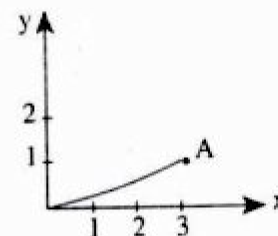


Figure 17

La parabole d'équation :

$$y = a\,x^2;\quad a = \frac{1}{4};\quad y = \frac{x^2}{4};\quad dy = \frac{x}{2}\,dx$$

$$\mathscr{C}_{OA} = \int_{OA}\left[4xy\, dx - x^2 dy\right] = \int_0^2 \left[4x\,.\,\frac{x^2}{4}dx - x^2\frac{x}{2}\,dx\right]$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx \qquad \text{soit} \quad \mathscr{C}_{OA} = 2$$

S 19

$\text{div}\,\vec{E}$ au point M est :

$= 0$: il n'y a pas de source de $\vec{E}$ en M.

> 0 : il y a des sources positives de $\vec{E}$ en M.

< 0 : il y a des sources négatives de $\vec{E}$ en M

$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}$ au point M est :

$= 0$: il n'y a pas de tourbillons de $\vec{E}$ en M.

$\neq 0$: il y a des tourbillons de $\vec{E}$ en M.

• $\vec{E}_1 = ax\,\vec{i} = E_{1x}\,\vec{i}$

d'après les formules du tableau 1 on a :

$$\text{div}\,\vec{E}_1 = \frac{\partial E_{1x}}{\partial x} = a$$

le champ $\vec{E}_1$ est créé par des sources.

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_1 = \vec{0}$: le champ $\vec{E}_1$ n'est pas créé par des tourbillons.

• $\vec{E}_2 = ax\,\vec{j} = E_{2y}\,\vec{j}$

$\text{div}\,\vec{E}_2 = 0$: il n'y a pas de sources.

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_2 = a\,\vec{k}$: il y a des tourbillons.

• $\vec{E}_3 = r^2\,\vec{e}_r = E_{3r}\,\vec{e}_r$

$\text{div}\,\vec{E}_3 = 4r$

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_3 = \vec{0}$

• $\vec{E}_4 = r\,\vec{e}_\theta = E_{4\theta}\,\vec{e}_\theta$

$\text{div}\,\vec{E}_4 = 0$

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_4 = -2\vec{e}_\varphi$

• $\vec{E}_5 = \overrightarrow{\text{grad}}\ (\text{Log}\,\rho) = \frac{1}{\rho}\,\vec{e}_\rho$ (voir tableau 1)

$\text{div}\,\vec{E}_5 = 0$

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_5 = \vec{0}$

il n'y a ni sources ni tourbillons.

S 20

$\text{div}\,\vec{E} = \text{div}\,(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} - \vec{a}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{b}$ (voir tableau 2)

Pour que $\vec{E}$ soit créé par des sources ($\text{div}\,\vec{E} \neq 0$), il faut que l'un des champs ($\vec{a}$ ou $\vec{b}$) soit créé par des tourbillons.

S 21 La condition pour que $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire est : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

$$\vec{E} = \frac{a}{r^2}\vec{e}_r$$

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ (le rotationnel d'un champ radial est toujours nul). $\vec{E}$ dérive du potentiel scalaire U, $\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}\ U$.

$$E_r = \frac{dU}{dr} = \frac{a}{r^2} \text{ d'où } dU = \frac{a}{r^2}dr \text{ et } U = -\frac{a}{r} + c^{te}$$

La constante sera déterminée par des conditions aux limites.

Remarque : Si $\vec{E}$ est un champ électrique, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ U$, car le $\overrightarrow{\text{grad}}\ U$ est orienté dans le sens croissant de U; $\vec{E}$ dans le sens décroissant du potentiel U.

Il s'ensuit que $U = \frac{a}{r} + c^{te}$

III. ANGLE SOLIDE

S 22

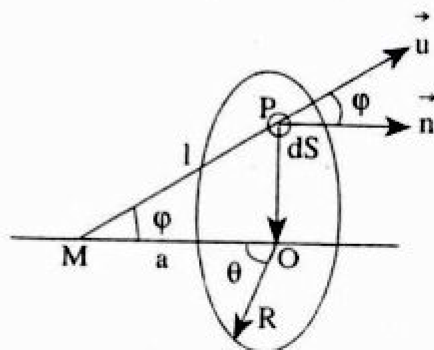


Figure 18

$\vec{u}$: vecteur unitaire du rayon vecteur $\overrightarrow{MP}$.

$\vec{n}$: vecteur unitaire normal à dS.

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}\,.\,\vec{u}}{MP^2} = \frac{dS\cos\varphi}{l^2}$$

dS est l'élément de surface dans les coordonnées polaires.

$$d\Omega = \frac{\rho\, d\rho\, d\theta\,.\cos\varphi}{l^2}\ ;\ \cos\varphi = \frac{a}{l}\ ;\ l^2 = a^2 + \rho^2\ ;\ OP = \rho$$

$$d\Omega = \rho\ d\rho\ d\theta\ \frac{a}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$$

$$\Omega = a\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho\ d\rho}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$$

et finalement :

$$\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

S 23

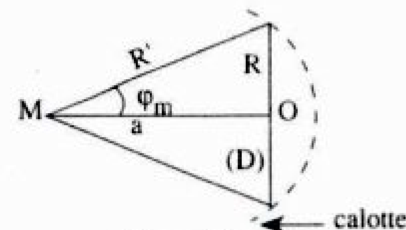


Figure 19

$$\Omega' = \frac{S'}{R'^2}\ ;\ R' = \frac{a}{\cos\varphi_m}$$

$$dS' = R'^2 \sin\varphi\ d\theta\ d\varphi$$

$$S' = R'^2\int_0^{\varphi_m}\sin\varphi\ d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\, R'^2(1-\cos\varphi_m)$$

d'où :

$$\Omega' = 2\pi\,(1-\cos\varphi_m)\ ;\ \cos\varphi_m = \frac{a}{R'} = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

On obtient donc :

$$\Omega' = 2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

On remarque que :

$$\Omega = \Omega'$$

ELCTROSTATIQUE

ELECTROSTATIQUE

LOI DE COULOMB

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$

PRINCIPE DE SUPERPOSITION

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_0}{r_{i0}^2}\vec{u}_{i0}$$

$\vec{F} = q\vec{E}$

CHAMPS ELECTRIQUE

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{i0}^2}\vec{u}_{i0}$$

EQUATIONS DE MAXWELL

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$$

$\Downarrow$

THEOREME DE GAUSS

$$\iint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \sum \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$

POTENTIEL

$$V = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

EQUATION DE POISSON

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

EQUATION DE LAPLACE

$$\Delta V = 0$$

ENONCES DES EXERCICES

I. LOI DE COULOMB

E 24 En un point A sur l'axe Ox se trouve une charge 2q. En un point B la charge - q. Déterminer la position de la charge +q où la force exercée sur elle par les deux autres charges est nulle.

II. CHAMP ELECTROSTATIQUE

II. 1) SYSTEME DE CHARGES PONCTUELLES

E 25 Deux charges ponctuelles -2q et +q sont placées en deux points A et B de l'axe Ox.

(OA = +a , OB = - a). Trouver le champ $\vec{E}$ en tout point de l'axe des y.

E 26 Soient trois points alignés tel que AB = BC. La charge + nq est placée en A, en B la charge - mq; n et m des entiers positifs et m > n. Comparer le champ en C au champ se trouvant au milieu de AB.

II. 2) DISTRIBUTION DE CHARGES : METHODE DIRECTE

E 27 Un segment AB est uniformément chargé avec la densité $\lambda > 0$.

1) Calculer le champ $\vec{E}$ créé par le segment en un point M de son plan médiateur.

2) Que devient $\vec{E}$ si la longueur devient infinie ?

E 28 Un segment AB de longueur 2l est chargé avec la densité $\lambda > 0$. Le segment est placé selon l'axe Ox; l'axe Oy ne passe pas par son milieu.

1) Calculer le champ électrostatique au point M sur l'axe Oy.

2) En déduire le champ lorsque le point M est sur l'axe de symétrie du segment.

E 29 Deux demi - droites distantes de 2d comme le montre la figure 20, sont chargées avec la densité $\lambda > 0$. Déterminer le champ en un point M du plan médiateur du segment AB.

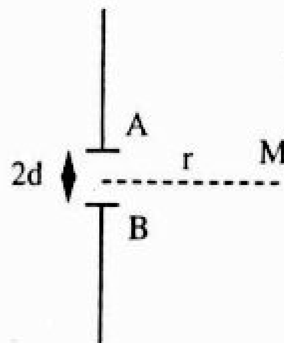


Figure 20

E 30 Un disque de centre O et de rayon R est uniformément chargé avec une densité surfacique σ positive.

1) Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point M de l'axe du disque (OM = z).

2) Tracer la courbe E(z) et en déduire le champ au centre O du disque.

3) Retrouver le champ créé par un plan illimité uniformément chargé en tout point de l'espace.

E 31 On considère un plan infini chargé avec la densité

SOLUTIONS DES EXERCICES

S 24

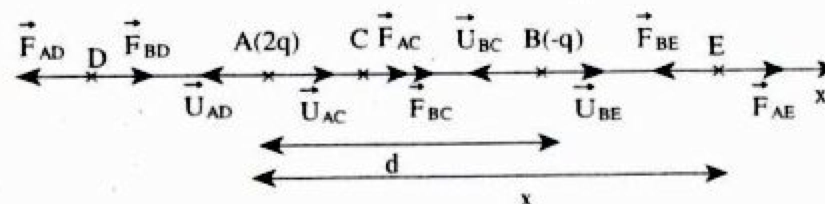


Figure 21

Le principe de superposition :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_o}{r_{io}^2} \vec{u}_{io}$$

$\vec{F}$: la force exercée par les charges q_i sur q_0.

$\vec{u}_{io}$: le vecteur unitaire dirigé de q_i vers q_0.

Si on place la charge +q en C, la force $\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC}$ ne sera jamais nulle car $\vec{F}_{AC}$ et $\vec{F}_{BC}$ sont de même sens comme le montre la figure 21.

La charge q en E : $\vec{F} = \vec{F}_{AE} + \vec{F}_{BE}$

$$\vec{F}_{AE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q\,q}{x^2} \vec{u}_{AE} \quad ; \quad \vec{F}_{AE} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{x^2} \vec{i}$$

$$\vec{F}_{BE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q.q}{(x-d)^2} \vec{u}_{BE} \quad ; \quad \vec{F}_{BE} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x-d)^2} \vec{i}$$

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{2}{x^2} - \frac{1}{(x-d)^2} \right] \vec{i}$$

$\vec{F} = \vec{0}$ donc : $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{(x-d)^2} = 0$

soit :

$x^2 - 4xd + 2d^2 = 0$

Les solutions sont :

$x_1 = d(2+\sqrt{2})$ et $x_2 = d(2-\sqrt{2})$

$x_2 = d(2-\sqrt{2})$ n'est pas une solution physique, car la charge +q va se trouver entre A et B où la force ne sera jamais nulle.

La solution est : $x_1 = d(2+\sqrt{2})$

S 25

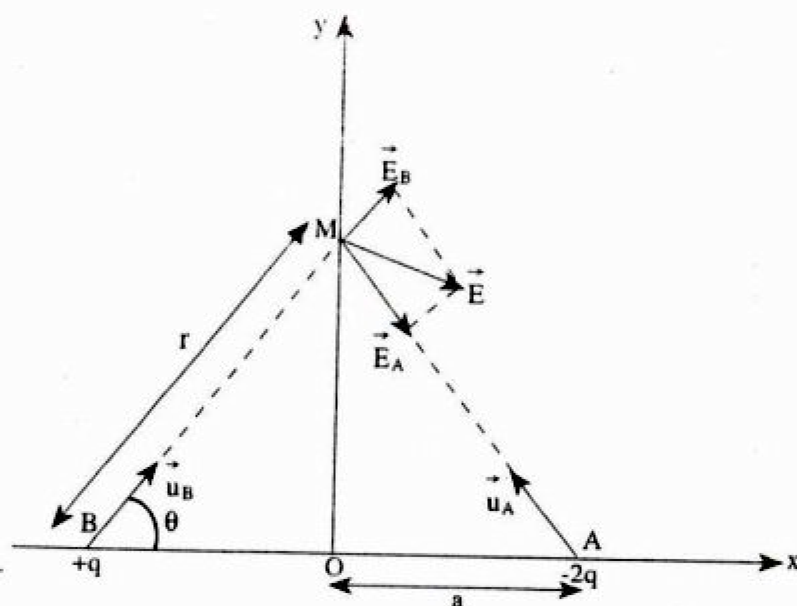


Figure 22

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

$\vec{u}_i$ est toujours dirigé de la charge vers le point M.

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{-2q}{r^2}\vec{u}_A,\ E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q}{r^2}$$

$$\vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{+q}{r^2}\vec{u}_B,\ E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

• Les composantes

on a :

$$\vec{E}_A \begin{cases} E_{Ax} = E_A\cos\theta \\ E_{Ay} = -E_A\sin\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{E}_B \begin{cases} E_{Bx} = E_B\cos\theta \\ E_{By} = E_B\sin\theta \end{cases}$$

On obtient :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = (E_A + E_B)\cos\theta = \dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cos\theta \\ E_y = -(E_A - E_B)\sin\theta = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\sin\theta \end{cases}$$

• Le module

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\sqrt{9\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

S 26

$$E_M = \frac{-16(m+n)}{4m-n}E_C$$

S 27 1)

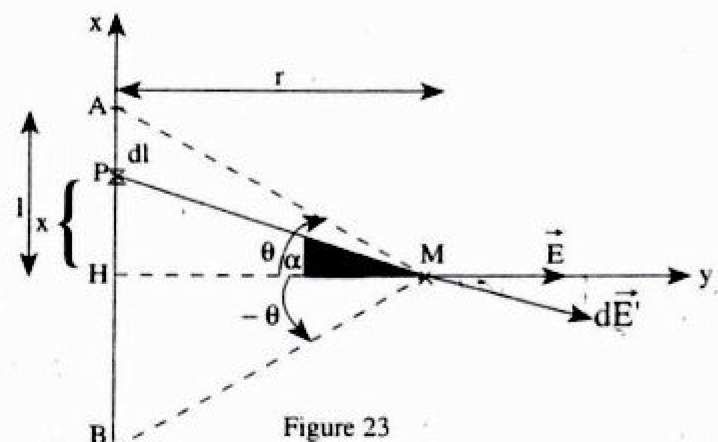


Figure 23

$\vec{E}$ est porté par HM. HM est une ligne de champ

Cherchons le champ dE' créé par l'élément dl du segment AB.

$$dE' = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o (PM)^2} = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_o (PM)^2} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_o (PM)^2}$$

or

$$dE = dE' \cos\alpha = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_o (PM)^2}\cos\alpha$$

d'autre part

$$tg\,\alpha = \frac{x}{r}\ ,\ dx = \frac{r}{\cos^2\alpha}\, d\alpha$$

et

$$\cos\alpha = \frac{r}{PM}$$

On obtient donc

$$E = \int_{-\theta}^{+\theta} dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o r}\int_{-\theta}^{+\theta}\cos\alpha\, d\alpha$$

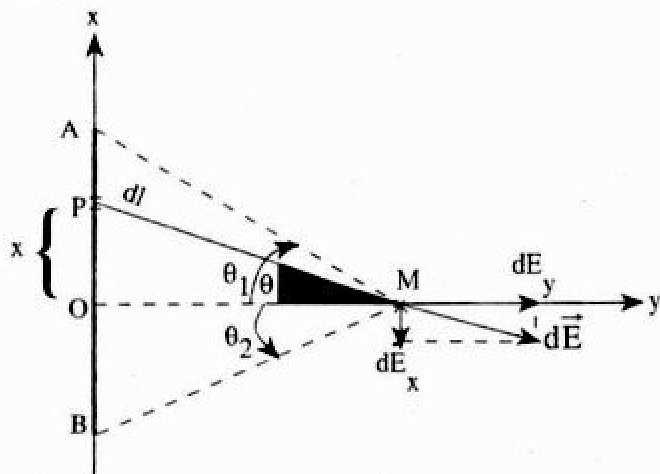
finalement

$$E = \frac{\lambda \sin\theta}{2\pi\varepsilon_o r}$$

2) Pour une ligne infinie; on a :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

S 28 1)



La charge élémentaire $dq = \lambda$ dl en un point P crée en un point M un champ électrique :

$$dE = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_o (PM)^2} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_o (PM)^2}$$



Par ailleurs

$$tg\,\theta = \frac{x}{r}\ ,\ dx = \frac{r}{\cos^2\theta}\, d\theta \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{r}{PM}$$

Le champ électrique peut encore s'écrire :

$$dE = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_o r}$$

Les composantes du vecteur champ sont :

$$d\vec{E}\begin{cases} dE_x = -\,dE\sin\theta \\ dE_y = dE\cos\theta \end{cases}$$

d'où

$$E_x = -\int dE\sin\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o r}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o r}\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right]$$

$$E_y = \int dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o r}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o r}\left[\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right]$$

Le module du champ est :

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o r}\sqrt{2 - 2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

2) si M appartient à l'axe de symétrie, alors on a : $\theta_2 = -\theta_1$ et l'expression du champ $\vec{E}$ est :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\sin\theta \quad \text{ou} \quad E = \frac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_o r\sqrt{l^2 + r^2}}$$

S 29 Si le segment AB était chargé avec la même

densité $\lambda > 0$, il créerait un champ $E_{AB} = \frac{\lambda \sin\theta}{2\pi\varepsilon_o r}$,

et on aurait alors un fil infini dont le champ serait :

$$E_\infty = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Le champ créé par l'ensemble des deux demi - droites correspond donc à l'état du fil infini auquel on enlève les mêmes charges du segment AB. On alors :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_\infty - \vec{E}_{AB}$$

Les deux champs ont même sens, et $E(M) = E_\infty - E_{AB}$

D'où

$$E(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}[1 - \sin\theta] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\left[1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}}\right]$$

S 30 1)

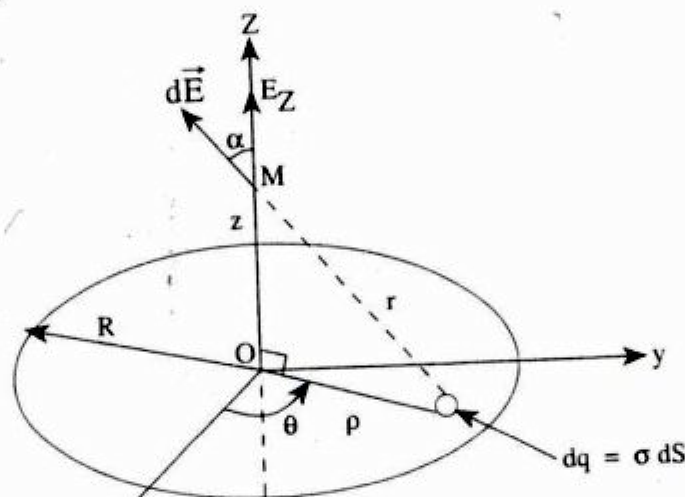


Figure 25

Par raison de symétrie, le champ électrique est dirigé ...

chaque côté du disque.

La charge $dq = \sigma\, dS$ produit un champ : $dE = \frac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_o r^2}$

Le champ électrique est normal au disque; on a : $\vec{E} = E_z\vec{k}$
Par projection sur l'axe OZ :

$$E_z = \iint_{disque} dE \cos\alpha$$

$$E_z = \iint_{disque} \frac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cos\alpha = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\iint_{disque}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{r^2}\cdot\frac{z}{r}$$

or

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$$

on a :

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\left[\sqrt{z^2 + \rho^2}\right]^3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_o}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]$$

soit

$$E_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right] & \text{pour } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[-1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right] & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

2)

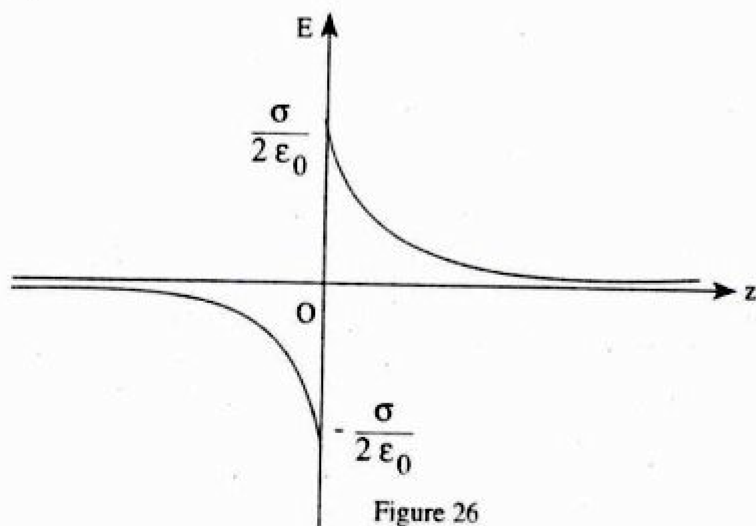


Figure 26

Le champ $\vec{E}$ est discontinu à travers une surface chargée.
Pour z = 0 :

$$\vec{E}(0) = \frac{\vec{E}(z = 0^+) + \vec{E}(z = 0^-)}{2} = \vec{0}$$

$$\vec{E}(0) = \vec{0}$$

O est un centre de symétrie, le champ y est nul.

3) Il suffit de faire tendre vers l'infini le rayon R du disque chargé.

$$\vec{E}\,(\text{plan infini}) = \lim_{R \to \infty} \vec{E}\,(\text{disque}) = \pm \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o}\vec{k}$$

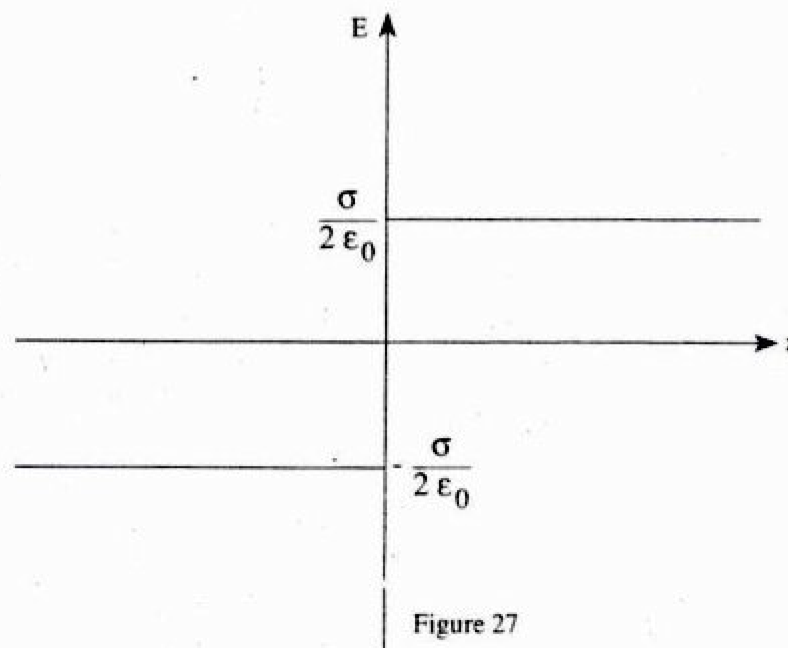


Figure 27

Le champ est uniforme de chaque côté du plan, mais le sens est opposé de part et d'autre du plan.

S 31

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\,\varepsilon_o\sqrt{z^2 + R^2}}\vec{k}$$

III. THEOREME DE GAUSS

ENONCES DES EXERCICES

- Méthode d'étude pour l'emploi du théorème de Gauss.

1) On étudie les symétries du problème et on détermine la direction du vecteur $\vec{E}$ au point M.

2) On choisit une surface de Gauss passant par M. On prend une équipotentielle ou un tube de champ, entiers ou limités et fermés par des sections droites.

3) On calcule le flux électrique.

Le théorème de Gauss n'est applicable que si le système présente une symétrie parfaite.

E 32 Soit une sphère de centre O et de rayon R, chargée avec une densité volumique constante $\rho > 0$. Trouver le champ $\vec{E}$ en tout point M de l'espace.

E 33 a) L'espace entre deux sphères concentriques de centre O et de rayon R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), est chargé avec une densité volumique de charge ρ positive et constante. Déterminer le champ électrostatique en tout point M de l'espace.

b) Que devient ce champ si la densité de charge n'est plus constante, $\rho = \frac{a}{r^2}$? a est une constante.

E 34 Soient deux sphères (S_1) et (S_2) de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), non concentriques.

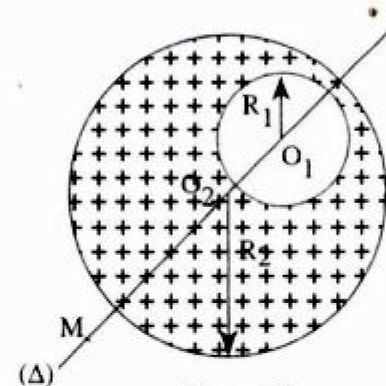


Figure 28

L'espace entre les deux sphères est chargé avec une densité de charge uniforme $\rho > 0$.

Trouver le champ en tout point M de la droite (Δ) passant par les centres O_1 et O_2, avec $O_1O_2 = a$.

E 35 a) Deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) chargées respectivement en surface avec des charges Q et - Q. Trouver le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par les deux sphères.

b) Que devient le champ $\vec{E}$ si les sphères sont chargées avec les densités de charges σ et - σ ? σ est une constante.

E 36 Calculer le champ électrique $\vec{E}$ créé par un cylindre infini de rayon R à la distance r de son axe (Δ). Le cylindre porte une charge Q positive.

E 37 Deux cylindres coaxiaux infinis de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) sont chargés avec une densité de charge linéique λ et - λ respectivement. Trouver le champ en tout point M de l'espace.

E 38 a) Calculer le champ électrique créé par l'espace chargé entre deux cylindres coaxiaux infinis de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). La densité de charge volumique ρ est constante

b) Refaire la même question si : $\rho = \frac{a}{r}$, a est une constante.

E 39 1) Calculer le champ créé par un plan infini chargé avec une densité surfacique σ constante et positive.

2) En déduire le champ créé par deux plans chargés uniformément avec des densités de charges opposées σ et $-\sigma$ en tout point situé entre les deux plans ou à l'extérieur.

E 40 Déterminer le champ créé par un fil infini chargé avec une densité de charge $\lambda > 0$.

E 41 Calculer le champ créé par une sphère uniformément chargée avec la densité $\rho > 0$, en utilisant les équations de Maxwell.

E 42 Calculer à l'aide des équations de Maxwell, le champ créé par un cylindre infini de rayon R, chargé avec une densité de charge $\rho > 0$.

E 43 Calculer le champ créé par un plan infini chargé avec une densité de charge σ, en utilisant les équations de Maxwell.

SOLUTIONS DES EXERCICES

S 32 Le système est invariant par rotation autour de tout axe passant par le centre O, donc E(M) = E'(M'). Le champ est radial et ne dépend que de r : $\vec{E}(M) = E(r) \cdot \vec{e}_r$

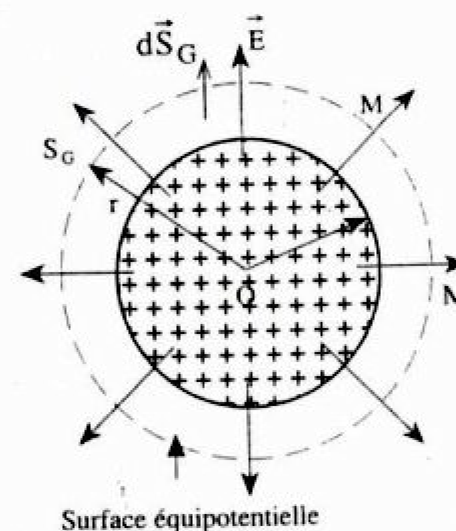


Figure 29

- **lignes de champ** : elles sont radiales.
- **surfaces équipotentielles :** des sphères de centre O.
- **surface de Gauss (S_G)** : une sphère de centre O et de rayon r.

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_{S_G} \vec{E}\, d\vec{S}_G = \iint_{S_G} E\, dS_G \quad \text{car} \quad \vec{E} \,/\!/\, d\vec{S}_G$$

$$\Phi = E \iint_{S_G} dS_G \quad \text{car} \quad E(r) = cte \ \text{à} \ r = cte$$

$$\text{d'où} \quad \Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_o}$$

$$\text{et} \quad E = \frac{\sum Q_i}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

• **1er cas :** M à l'intérieur de la sphère chargée : $r < R$ (figure 30)

$\sum Q_i$: les charges qui se trouvent à l'intérieur de la surface de Gauss.

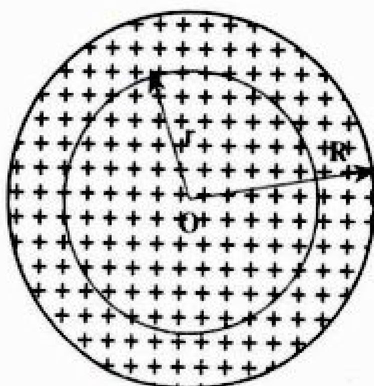


Figure 30

$$\sum Q_i = \iiint \rho\, dV = \rho \iiint dV = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (\rho = cte)$$

d'où

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o}$$

• **2e cas :** M à l'extérieur de la sphère : $r > R$ (figure 29)

$$\sum Q_i = \rho . \frac{4}{3}\pi R^3 \quad et \quad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2}$$

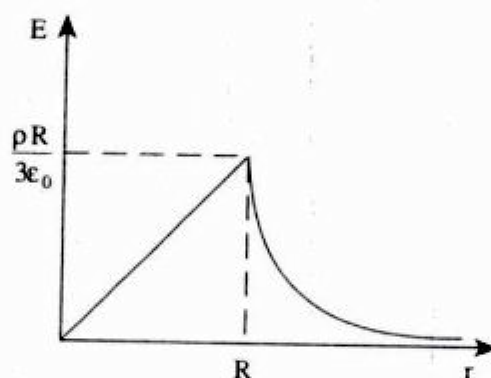


Figure 31

Le champ $\vec{E}$ est continu.

S 33 a)

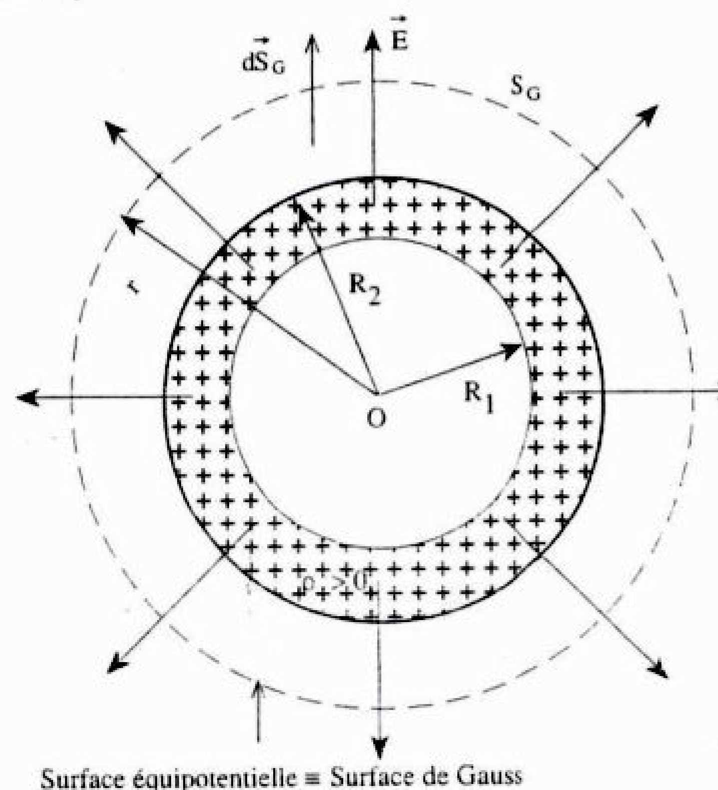


Figure 32

Appliquons le théorème de Gauss, en prenant comme surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon r :

$$\Phi = \iint_{S_G} \vec{E}\, d\vec{S}_G = E \,.\, 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_o}$$

$$et \quad E = \frac{\sum Q_i}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Les charges à l'intérieur d'un élément de surface de rayon r et d'épaisseur dr sont :

$$\sum Q_i = \iiint \rho\, dV = \rho \iiint r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \rho \int r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\sum Q_i = 4\pi\rho \int r^2 dr$$

• **1er cas** : $r < R_1$

à l'intérieur de la sphère de Gauss, il n'y a pas de charge : $\rho = 0$, $\Sigma Q_i = 0$ ce qui donne $E_1 = 0$

• **2e cas** : $R_1 < r < R_2$

$$\sum Q_i = 4\pi\rho \int_{R_1}^{r} r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi\rho\left(r^3 - R_1^3\right)$$

d'où

$$E_2 = \frac{\rho\left(r^3 - R_1^3\right)}{3\,\varepsilon_o\,r^2}$$

• **3e cas** : $r > R_2$ (figure 32)

$$\sum Q_i = 4\pi\rho \int_{R_1}^{R_2} r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

d'où

$$E_3 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\,\varepsilon_o\,r^2}$$

b) La densité de charge ρ dépend de r, $\rho = \dfrac{a}{r^2}$

$$\sum Q_i = \int \rho\, r^2\,dr \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi \int \rho\, r^2\,dr$$

d'où

$$\sum Q_i = 4\pi a \int dr$$

• **1er cas** : $r < R_1$

$$\rho = 0\ ;\ \sum Q_i = 0 \text{ et } E'_1 = 0$$

• **2e cas** : $R_1 < r < R_2$

$$\sum Q_i = 4\pi a \int_{R_1}^{r} dr = 4\pi a\ (r - R_1)$$

et



$$E'_2 = \frac{a\,(r - R_1)}{\varepsilon_o\,r^2}$$

• **3e cas** : $r > R_2$

$$\sum Q_i = 4\pi a \int_{R_1}^{R_2} dr = 4\pi a\,(R_2 - R_1)$$

et

$$E'_3 = \frac{a\,(R_2 - R_1)}{\varepsilon_o\,r^2}$$

S 34 On ne peut pas appliquer directement le théorème de Gauss, car le système n'est pas symétrique. On suppose que la sphère de rayon R_1 est chargée avec la même densité $\rho > 0$ (voir l'exercice 29).

Calculons le champ créé par chaque sphère.

• **sphère** (S_1) :

• M à l'intérieur :

$$E_{1i} = \frac{\rho\,r}{3\varepsilon_o}\ ;\ \vec{E}_{1i} = \frac{\rho\,r}{3\varepsilon_o}\vec{e}_{1r} \quad \text{(voir figure 33)}$$

• M à l'extérieur :

$$E_{1e} = \frac{\rho\,R_1^3}{3\varepsilon_o\,r^2}\ ;\ \vec{E}_{1e} = \frac{\rho\,R_1^3}{3\varepsilon_o\,r^2}\vec{e}_{1r}$$

avec r : rayon de la surface de Gauss relative à la sphère de rayon R_1.

• **sphère** (S_2) :

• M à l'intérieur :

$$E_{2i} = \frac{\rho\,r'}{3\varepsilon_o}\ ;\ \vec{E}_{2i} = \frac{\rho\,r'}{3\varepsilon_o}\vec{e}_{2r} \quad \text{(voir figure 33)}$$

• M à l'extérieur :

$$E_{2e} = \frac{\rho\,R_2^3}{3\varepsilon_o\,r'^2}\ ;\ \vec{E}_{2e} = \frac{\rho\,R_2^3}{3\varepsilon_o\,r'^2}\vec{e}_{2r}$$

avec r' : rayon de la surface de Gauss relative à la

sphère de rayon R_2.

Le champ créé par l'ensemble des deux sphères est :

$$\vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$$

$M \in (\Delta)$ donc $\vec{e}_{1r} = \vec{e}_{2r} = \vec{e}_r$ (voir figure 33)

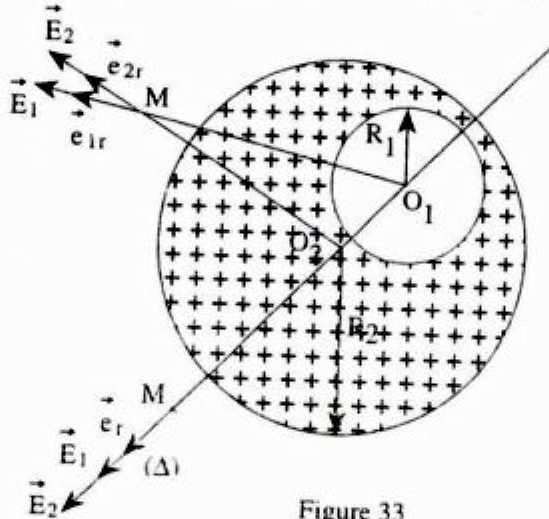


Figure 33

• **1er cas** : M à l'intérieur de S_2 et à l'extérieur de S_1 :

$$\vec{E} = \left(\frac{\rho\, r'}{3\,\varepsilon_o} - \frac{\rho\, R_1^3}{3\,\varepsilon_o\, r^2}\right)\vec{e}_r$$

• **2e cas** : M à l'extérieur des deux sphères

$$\vec{E} = \left(\frac{\rho\, R_2^3}{3\,\varepsilon_o\, r'^2} - \frac{\rho\, R_1^3}{3\,\varepsilon_o\, r^2}\right)\vec{e}_r$$

• **3e cas** : M à l'intérieur des deux sphères

$$\vec{E} = \frac{\rho\, a}{3\varepsilon_o}\vec{e}_r$$

S 35 a)

• $r < R_1 :\ E_1 = 0\ ;\ R_1 < r < R_2 :\ E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2}\ ;$

$r > R_2 :\ E_3 = 0$

b)

• $r < R_1 :\ E_1 = 0\ ;\ R_1 < r < R_2 :\ E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{R_1^2}{r^2}\ ;$

$r > R_2 :\ E_3 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{\left(R_1^2 - R_2^2\right)}{r^2}$

S 36

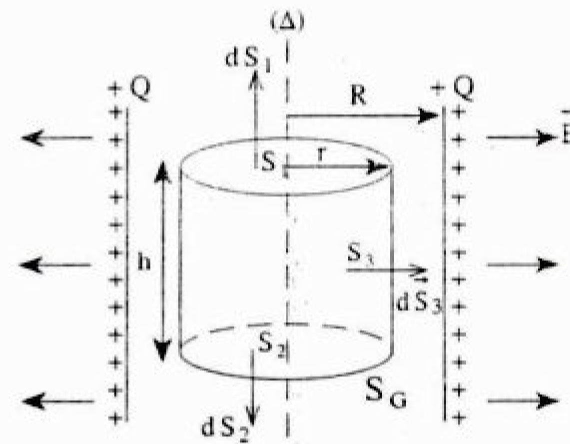


Figure 34

L'étude des symétries montre que le champ électrostatique est radial.

• **lignes de champ** : elles sont radiales

• **surfaces équipotentielles** : ce sont des cylindres d'axe (Δ)

• **surface de Gauss (S_G)** : c'est un cylindre de rayon r, de hauteur h, limité par deux surfaces S_1 et S_2.

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_{S_G} \vec{E}\, d\vec{S}_G = \iint_{S_1} \vec{E}\, d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}\, d\vec{S}_3$$

$$\Phi = \iint_{S_3} \vec{E}\, d\vec{S}_3 \quad \text{(voir l'exercice 14)}$$

$$\Phi = \iint E\, dS_3 = E \iint_{S_3} dS_3 = E\,.\,2\pi\, r\, h = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$$

$$(\vec{E} /\!/ d\vec{S}_3) \quad \text{et} \quad (E = c^{te}\ ,\ r = c^{te})$$

On tire :

$$E = \frac{\sum Q_i}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

- **1er cas** : $r < R$ (figure 34)

$$\Sigma Q_i = 0 \ ; \ E_1 = 0$$

- 2e cas : $r > R$

$$\sum Q_i = Q \ ; \ E_2 = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

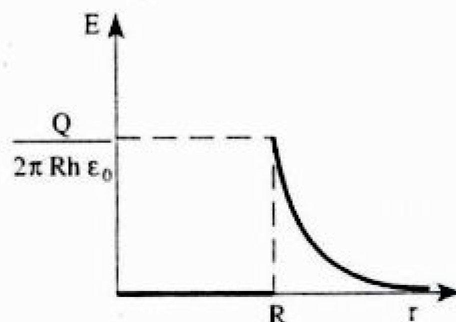


Figure 35

Le champ $\vec{E}$ est discontinu lors de la traversée d'une surface chargée. La traversée s'accompagne d'une discontinuité σ / ε_0, avec $Q = 2\pi R h \sigma$

S 37 D'après le théorème de Gauss :

$$E = \frac{\sum Q_i}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

- **1er cas** : $r < R_1$

$$\sum Q_i = 0 \ ; \ E_1 = 0$$

- **2e cas** : $R_1 < r < R_2$

$$\sum Q_i = \int \lambda dz = \lambda h \ ; \ E_2 = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

- **3e cas** : $r > R_2$

$$\sum Q_i = \lambda h - \lambda h = 0 \ ; \ E_3 = 0$$

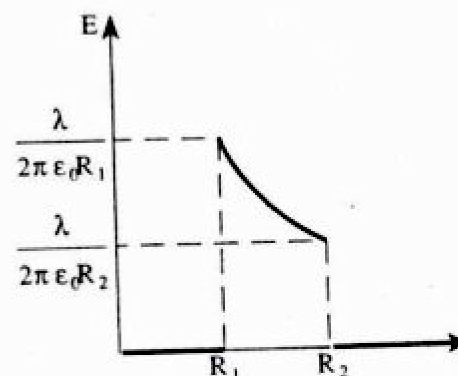


Figure 36

S 38 a)

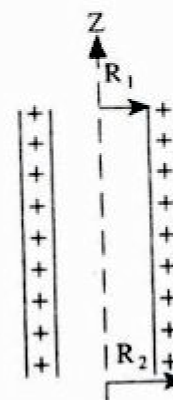


Figure 37

D'aprés le théorème de Gauss :

$$E = \frac{\sum Q_i}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

La symétrie est cylindrique donc

$$\sum Q_i = \iiint \rho \, dV = \rho \iiint r \, dr \, d\theta \, dz \quad (\rho = cte)$$

$$= \rho \int r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h} dz$$

et

$$\sum Q_i = 2\pi \rho h \int r \, dr$$

$$\sum Q_i = 0 \; ; E_1 = 0$$

• **2e cas** : $R_1 < r < R_2$

$$\sum Q_i = 2\pi \rho h \int_{R_1}^{r} r \, dr = \rho \pi h \left(r^2 - R_1^2\right)$$

et

$$E_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{\left(r^2 - R_1^2\right)}{r}$$

• **3^e^ cas** : $r > R_2$

$$\sum Q_i = 2\pi \rho h \int_{R_1}^{R_2} r \, dr = \rho \pi h \left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

$$E_3 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R_2^2 - R_1^2}{r}$$

b)

• $\mathbf{r < R_1}$: $E_1 = 0$

• $\mathbf{R_1 < r < R_2}$: $E_2 = \dfrac{a}{\varepsilon_0} \dfrac{(r - R_1)}{r}$

• $\mathbf{r > R_2}$: $E_3 = \dfrac{a}{\varepsilon_0} \dfrac{(R_2 - R_1)}{r}$

S 39 Invariance par translation parallèle au plan chargé :

$\vec{E}$ est le même en tout point du plan parallèle au plan chargé (P).

* **lignes de champs** : sont normales au plan, donc parallèles entre elles.

* **surfaces équipotentielles** : sont des plans parallèles au plan chargé.

* **Surface de Gauss (S_G)** : c'est un parallélépipède qui coupe le plan (Figure 38).

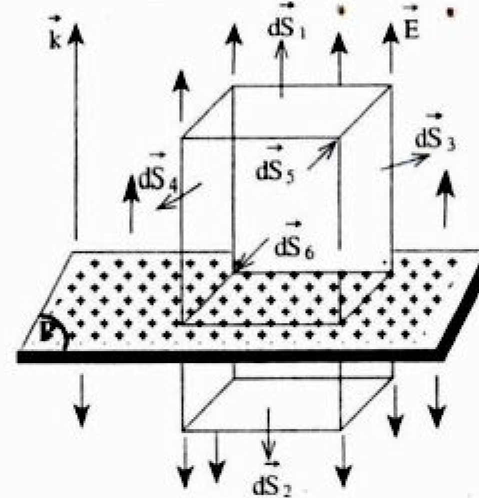


Figure 38

$\vec{E}$ est perpendiculaire à $d\vec{S}_3$, $d\vec{S}_4$, $d\vec{S}_5$ et $d\vec{S}_6$ d'où le flux est :

$$\Phi = \iint_{S_G} \vec{E} \, d\vec{S}_G = \iint_{S_1} \vec{E} \, d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \, d\vec{S}_2 =$$

$$ES_1 + ES_2 = 2ES = \frac{\Sigma Qi}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma s}{\varepsilon_0}$$

avec $S_1 = S_2 = S$, d'où enfin $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ et $\vec{E} = \pm \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{k}$

E est uniforme d'un même côté du plan chargé.

Nous pouvons choisir comme surface de Gauss, autre que le parallélépipède, un cylindre de rayon r et de hauteur h comme le montre la figure 39.

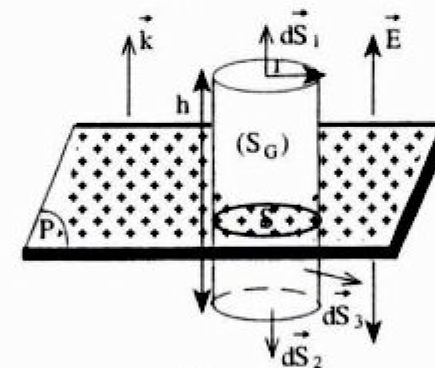


Figure 39

$$\Phi = \iint_{S_G} \vec{E}\, d\vec{S} = ES_1 + ES_2 = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} = 2ES$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

nous avons en effet le même résultat.

2)

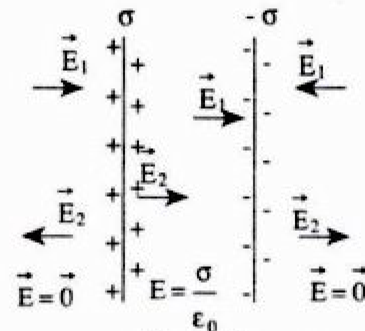


Figure 40

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

E_1 : champ créé par le plan (- σ)

E_2 : champ créé par le plan (+ σ)

S 40

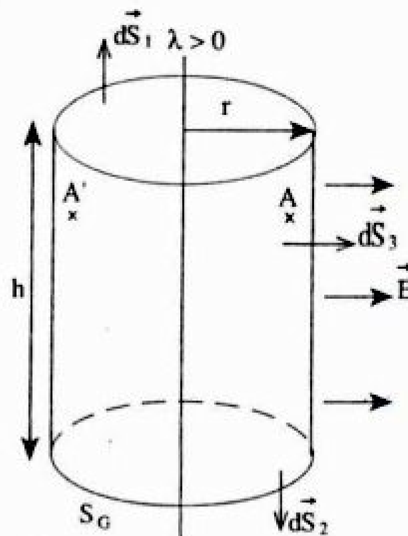


Figure 41

Invariance par rotation autour du fil, donc :

$$\|\vec{E}_{(A)}\| = \|\vec{E}_{(A')}\|$$

Invariance par translation parallèle au fil, $\vec{E}$ est donc constant.

- **lignes de champ** : sont radiales.
- **surfaces équipotentielles** : sont des cylindres d'axe le fil.
- **surface de Gauss (S_G)** : c'est un cylindre de rayon r de hauteur h et d'axe le fil.

$$\phi = \iint_{S_G} \vec{E}\, d\vec{S}_G = \iint_{S_3} \vec{E}\, d\vec{S}_3 = ES_3 = E \,.\, 2\pi\, r\, h$$

$$= \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\, h}{\varepsilon_0}$$

et

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\, r\varepsilon_0}$$

Nous avons en effet, le même résultat que l'exercice 27.

S 41 Le champ $\vec{E}$ est radial, l'équation :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

s'écrit, en utilisant les coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- **1er cas** : M à l'extérieur de la sphère

à l'extérieur il n'y a pas de charge $\rho = 0$ et $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = 0 \;,\; r^2 E_{r1} = C_1$$

- **2e cas** : M à l'intérieur de la sphère

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad r^2 E_{r2} = \frac{\rho\, r^3}{3\varepsilon_0} + C_2$$

cherchons les constantes C_1 et C_2.

Le centre O est un centre de symétrie, le champ y est nul, d'où

$$\lim_{r \to 0} E_{r2} = 0 \quad \text{et} \quad C_2 = 0$$

finalement :

$$E_{r2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

La surface n'est pas chargée, le champ est continu au point r = R

$$E_{r1}(R) = E_{r2}(R)$$

donc :

$$\frac{C_1}{R^2} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}, \quad C_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$$

et

$$E_{r1} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Nous avons le même résultat qu'à l'exercice 32.

S 42

- $r < R: \quad E_1 = \frac{\rho\, r}{2\varepsilon_0}; \qquad r > R: \quad E_2 = \frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_0\, r}$

S 43

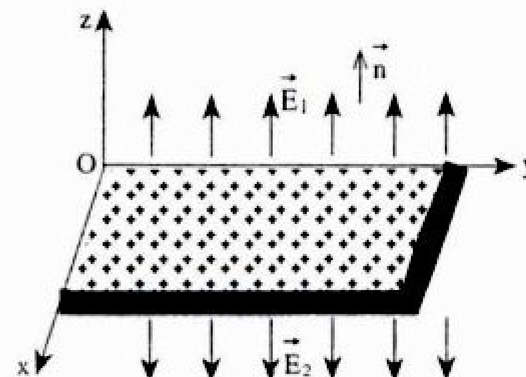


Figure 42

Soit un plan chargé se trouvant dans le plan Oxy à la cote z = 0.

Par raison de symétrie (voir l'exercice 39), le champ est dirigé suivant l'axe Oz. Les sens du champ sont opposés de chaque côté du plan.

Pour z > 0, l'équation :

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

s'écrit :

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = 0$$

d'où

$$E_1 = C_1$$

Cherchons la constante C_1

A la traversée d'une surface chargée, le champ est discontinu. La composante normale du champ subit une discontinuité de σ / ε_0 (voir l'exercice 36). Donc, lorsqu'on traverse le plan (des z > 0 vers les z < 0) le champ subit la discontinuité :

$$\Delta\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Le champ est uniforme, d'où $E_2 = E_1 = C_1$ et

$$2E_1 = 2C_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

finalement :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

IV. POTENTIEL ELECTRIQUE

ENONCES DES EXERCICES

IV. 1) SYSTEME DE CHARGES PONCTUELLES

E 44 Trois charges q_A, q_B et q_C se trouvent aux sommets d'un rectangle de côtés a et b. Quel est le potentiel au sommet D de ce rectangle?

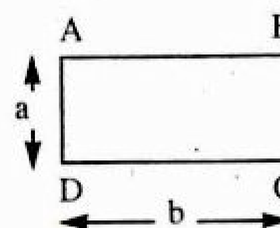


Figure 43

IV. 2) DISTRIBUTION DE CHARGES

E 45 Calculer le potentiel électrique créé en un point M quelconque de l'axe Oy par un segment chargé de longueur 2a, placé parallélement à l'axe Oy à l'abscisse x = -1. L'axe Ox passe par le milieu du segment. La densité λ est constante.

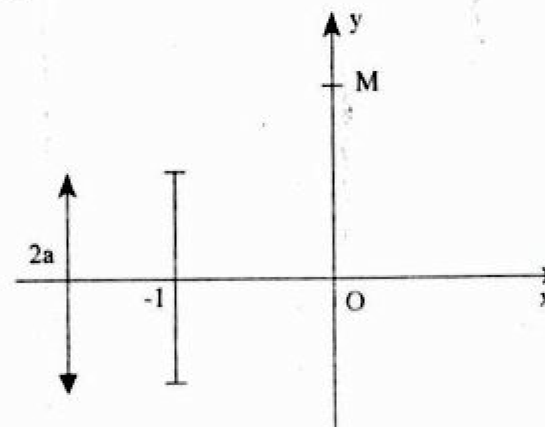


Figure 44

On donne :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \text{Log}\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) + C \text{ ,C est une constante.}$$

E 46 Un disque infiniment mince de centre O et de rayon R est chargé avec une densité surfacique σ positive et constante.

1) Calculer le potentiel créé par cette distribution en un point M de son axe.

2) En déduire le champ électrostatique.

E 47 Déduire de l'exercice 33. b, le potentiel en tout point M de l'espace.

E 48 Déduire de l'exercice 35. b, le potentiel en tout point M de l'espace.

E 49 Déduire de l'exercice 36, le potentiel en tout point M de l'espace.

E 50 De l'exercice 38. b, déterminer le potentiel en tout point M, sachant que le potentiel en un point de l'axe du cylindre est V_0.

E 51

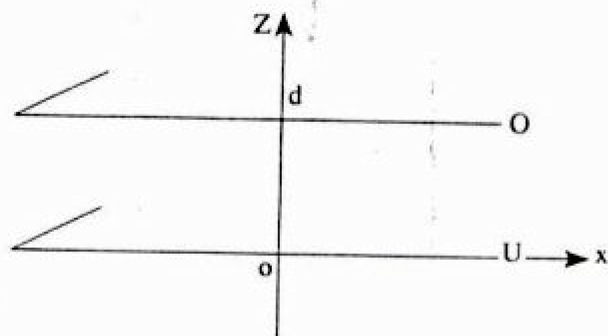


Figure 45

électrique en un point M de l'espace limité par deux plans parallèles, distants de d, comme le montre la figure 45. En déduire le champ.

SOLUTIONS DES EXERCICES

S 44

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_A}{a} + \frac{q_C}{b} + \frac{q_B}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

S 45

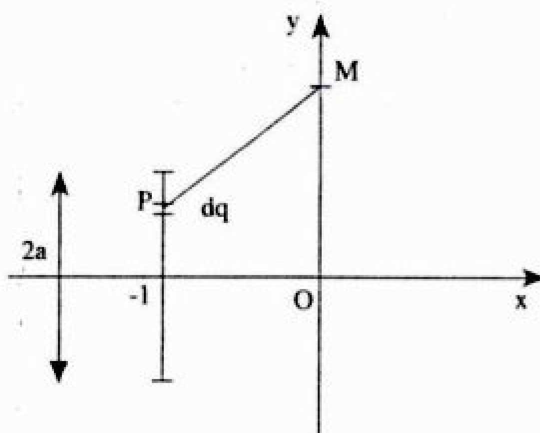


Figure 46

Prenons autour du point P un élément de longueur dl = dy

$M\begin{pmatrix}0\\y'\end{pmatrix}$; $P\begin{pmatrix}-1\\y\end{pmatrix}$; $\vec{r} = \overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}1\\y' - y\end{pmatrix}$

Le potentiel créé par la charge $dq = \lambda\, dy$ au point M est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\lambda\, dy}{r} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_{-a}^{+a} \frac{\lambda\, dy}{\sqrt{1+(y-y')^2}}$$

Posons $y - y' = z$, $dy = dz$

On obtient :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_{-a-y'}^{a-y'} \frac{\lambda\, dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\text{Log}\,\frac{a - y' + \sqrt{1+(a-y')^2}}{\dots}$$

S 46

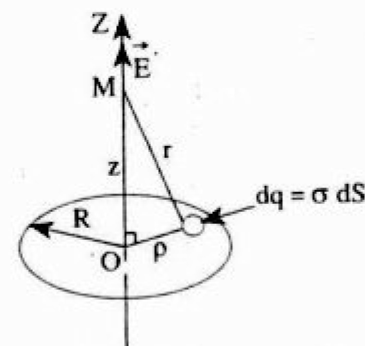


Figure 47

La charge $dq = \sigma\, dS$, crée en M situé à la distance z de O sur l'axe du disque le potentiel :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\,\rho\, d\rho . d\theta}{r}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

On obtient alors :

$$dV = \frac{\sigma}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\, d\theta$$

Le potentiel crée par la charge portée par tout le disque :

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{\rho^2+z^2}\right]_0^R$$

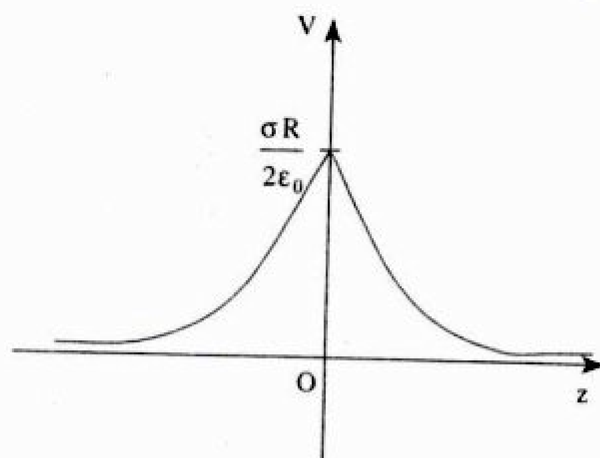


Figure 48

$$V = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - z\right] & \text{pour } z>0 \\ \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} + z\right] & \text{pour } z<0 \end{cases}$$

2) Par raison de symétrie, le champ total $\vec{E}$ est porté par l'axe OZ. Son module ne dépend que de la distance z. La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ devient :

$$E = -\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left[\frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}} \pm 1\right]$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left[1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] & \text{pour } z>0 \\ \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left[-1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] & \text{pour } z<0 \end{cases}$$

On obtient évidemment le même résultat qu'à l'exercice 30.

S 47 Le champ $\vec{E}$ est radial, il ne dépend que de r. La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ s'écrit alors :

$$E = -\frac{dv}{dr} \quad \text{et} \quad V(r) = \int E(r)\, dr + Cte$$

• $r > R_2$:

$$V_3 = -\int E_3'\, dr + C_3 = -\int \frac{a\,(R_2 - R_1)}{\varepsilon_0 r^2}\, dr + C_3$$

$$= \frac{a\,(R_2 - R_1)}{\varepsilon_0 r} + C_3$$

A l'infini, il n'y a pas de charges :

$r \to \infty$; $V_3 \to 0$ et la constante d'intégration $C_3 = 0$

On a alors :

$$V_3 = \frac{a\,(R_2 - R_1)}{\varepsilon_0 r}$$

• $R_1 < r < R_2$

$$V_2 = -\int E_2'\, dr + C_2 = -\int \frac{a\,(r - R_1)}{\varepsilon_0 r^2}\, dr + C_2$$

$$= -\frac{a}{\varepsilon_0} \text{Log}\, r - \frac{a R_1}{\varepsilon_0 r} + C_2$$

Le potentiel est continu pour $r = R_2$; on a donc : $V_3(R_2) = V_2(R_2)$

$$\frac{a\,(R_2 - R_1)}{\varepsilon_0 R_2} = -\frac{a}{\varepsilon_0} \text{Log}\, R_2 - \frac{a R_1}{\varepsilon_0 R_2} + C_2$$

et

$$C_2 = \frac{a}{\varepsilon_0}\left[1 + \text{Log}\, R_2\right]$$

finalement

$$V_2 = -\frac{a}{\varepsilon_0}\left[\frac{R_1}{r} + \text{Log}\, r\right] + \frac{a}{\varepsilon_0}\left[1 + \text{Log}\, R_2\right]$$

• $r > R_1$

$$V_1 = -\int E_1'\, dr + C_1 = C_1$$

le potentiel est continu pour $r = R_1$, donc

$V_2(R_1) = V_1(R_1)$ et

$$V_1 = C_1 = \frac{a}{\varepsilon_0}\left[\mathrm{Log}\,R_2 - \mathrm{Log}\,R_1\right]$$

S 48

$$\bullet\ r > R_2 : \quad V_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\left(R_1^2 - R_2^2\right)}{r}$$

$$\bullet\ R_1 < r < R_2 : \quad V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2}{r} - R_2\right]$$

$$\bullet\ r < R_1 : \quad V_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(R_1 - R_2\right)$$

S 49 La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ s'écrit :

$$E = -\frac{dv}{dr} \quad \text{et} \quad V(r) = -\int E(r)\,dr + C^{te}$$

• $r < R$: $V_1 = C^{te} = C_1$

• $r > R$:

$$V_2 = -\int \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 hr}\,dr + C_2 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\mathrm{Log}\,r + C_2$$

Le potentiel ne peut être nul à l'infini, il y a des charges à l'infini. On n'a pas d'autres conditions pour déterminer les constantes d'intégration. Le potentiel V(r) reste alors indéterminé, on ne peut définir qu'une d.d.p. Entre deux points M_1 et M_2 à une distance r_1 et r_2 respectivement de l'axe, la d.d.p est :

$$\int_{V(M_1)}^{V(M_2)} dV = -\int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\mathrm{Log}\,\frac{r_2}{r_1}$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R\,\mathrm{Log}\,\frac{r_2}{r_1}$$

$$V(M_2) - V(M_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R\,\mathrm{Log}\,\frac{r_2}{r_1}$$

S 50

• $r < R_1$: $V_1 = V_0$

• $R_1 < r < R_2$:

$$V_2 = \frac{a}{\varepsilon_0}\left[-r + R_1\,\mathrm{Log}\,r\right] + \frac{a}{\varepsilon_0}R_1\left[1 - \mathrm{Log}\,R_1\right] + V_0$$

• $r > R_2$:

$$V_3 = -\frac{a}{\varepsilon_0}\left(R_2 - R_1\right)\mathrm{Log}\,r + \frac{a}{\varepsilon_0}R_2\left[-1 + \mathrm{Log}\,R_2\right]$$

$$+ \frac{a}{\varepsilon_0}R_1\left[1 - \mathrm{Log}\,R_1\right] + V_0$$

S 51 L'équation du poisson est :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$\rho = 0$ et $\Delta V = 0$, c'est l'équation de Laplace.

Par raison de symétrie, le potentiel ne dépend que de z, l'équation de Laplace devient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \ , \quad V = a z + b$$

a et b sont des constantes.

pour $z = d$; on a : $V = 0$ et $ad + b = 0$
pour $z = 0$; on a : $V = U$ et $b = U$
} on déduit $b = U$ et $a = -U/d$

et l'expression du potentiel est :

$$V = -\frac{U}{d}z + U$$

Le champ $\vec{E}$ est suivant l'axe OZ (voir l'exercice 39),

l'équation $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ devient :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{et} \quad E = \frac{U}{d}$$

V. CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

ENONCES DES EXERCICES

E 52

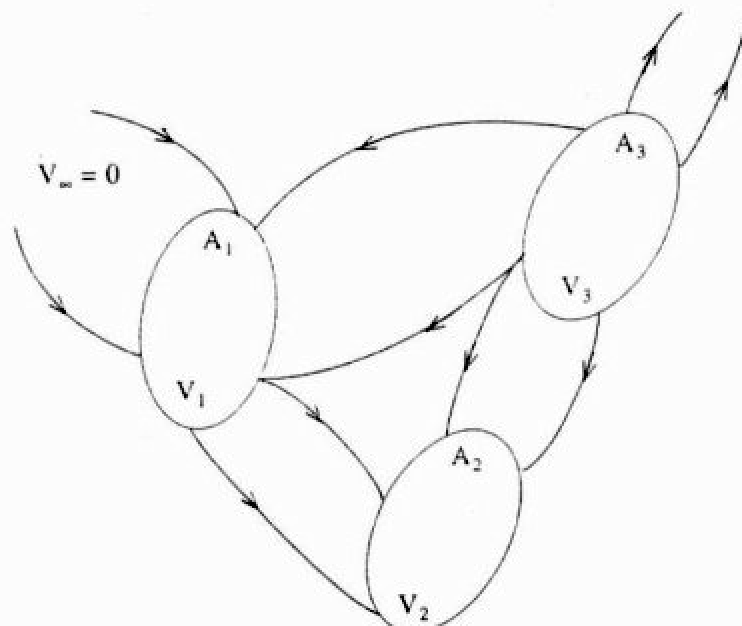


Figure 49

Soient trois conducteurs A_1, A_2 et A_3 en équilibre électrostatique. Les lignes de champ sont représentées sur la figure 49.

1) Comparer les potentiels V_1, V_2 et V_3 et préciser leurs signes.

2) Peut - on avoir les lignes de champ qui commencent en A_2 et qui partent vers l'infini ?

3) Quels sont les conducteurs qui portent sur leur surface en même temps des charges positives et négatives ?

E 53 1) Une sphère conductrice (S_1) de rayon R_1 est portée au potentiel $V_1 > 0$. Calculer sa charge Q_1.

2) On isole (S_1) de la source de potentiel, puis on l'entoure d'une autre sphère (S_2), initialement neutre, isolée et concentrique à (S_1) de rayon intérieur R_2 et extérieur R_3. Trouver les charges totales des deux sphères et les charges portées par les faces de (S_2).

3) On relie maintenant (S_2) au sol. Que deviennent les charges totales de (S_1) et de (S_2) ainsi que les charges portées par les faces de (S_2) ?

E 54 Une sphère conductrice pleine (S_1) a pour rayon R_1 est portée au potentiel V_1. Une deuxième sphère (S_2) conductrice et creuse, est concentrique à (S_1), a pour rayon $R_2 > R_1$. (S_2) est portée au potentiel V_2.

1) Donner les expressions de la charge Q_1 de la sphère (S_1), de la charge Q_2' portée par la surface intérieure de (S_2) et de la charge Q_2'' par la surface extérieure de (S_2).

2° En déduire les cœfficients de capacité et d'influence.

3) Que se passe - t - il si on porte les deux sphères au même potentiel V_2 ?

E 55 On considère les trois sphères conductrices concentriques S_1, S_2 et S_3, d'épaisseur négligeable et de rayon R_1, R_2 et R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). S_1 et S_3 sont reliées à la masse, S_2 porte la charge totale $Q_2 = Q_2' + Q_2''$, avec Q_2' la charge de la face interne de S_2 et Q_2'' la charge de la face externe de S_2 ($Q_2' \neq 0$, $Q_2'' \neq 0$).

1) La sphère S_1 sera - t - elle chargée ? Pourquoi ?

2) Trouver la charge Q_1 de S_1, la charge Q_3' de la face interne de S_3 et la charge Q_3'' de la face externe de S_3 en

3) Quel est le potentiel V_2 de la sphère S_2 ?

E 56 Une sphère conductrice (S_1) de rayon R_1 porte une charge Q_1. Une seconde sphère conductrice (S_2) de rayon R_2 porte une charge Q_2. Les deux sphères sont suffisamment éloignées pour qu'on puisse négliger les phénomènes d'influence.

1) Déterminer le potentiel de chaque sphère et leur énergie W_0.

2) On relie les deux sphères par un fil conducteur. Que deviennent leur potentiel et leur énergie ?

3) Calculer le rapport des champs électriques E_1 et E_2 existant à la surface de ces sphères.

E 57 Un condensateur cylindrique est constitué de quatre cylindres coaxiaux (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4), dont les rayons sont $R_1 < R_2 < R_3 < R_4$, respectivement. On prend comme armatures, d'une part (C_2) et (C_3) réunis et d'autre part (C_1) et (C_4) réunis. Calculer la capacité de ce condensateur.

E 58

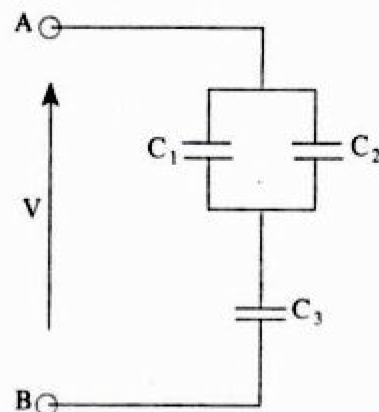


Figure 50

1) Déterminer la capacité équivalente du groupement de la figure 50.

2) Pour chacun des condensateurs, déterminer la charge et la différence de potentiel.

E 59 1) Déterminer la capacité équivalente du groupement de la figure 51.

2) Calculer la charge de chaque condensateur.

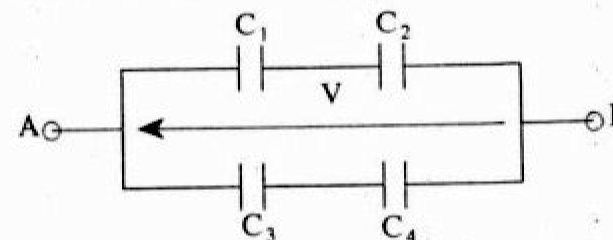


Figure 51

SOLUTIONS DES EXERCICES

S 52 1) Les lignes de champ satisfont aux conditions suivantes :

a - les lignes de champ sont normales à la surface des conducteurs.

b - Elles vont des charges positives vers les charges négatives.

c - Le potentiel décroît le long des lignes de champ.

d - Une ligne de champ ne se referme pas sur un même conducteur.

$$\left.\begin{array}{l} V_1 > V_2 \\ V_3 > V_1 \\ V_3 > V_2 \end{array}\right\} \text{d'où } V_3 > V_1 > V_2 \qquad ①$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 < 0 \\ V_3 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{d'après la condition - c -}$$

$V_2 < 0 \rightarrow$ d'après l'inégalité ①

2) Si les lignes de champ partent vers l'infini, le potentiel V_2 sera positif, ce qui est en contradiction avec la première question.

3) D'après la condition - b -, seul le conducteur A_1 porte des charges positives et négatives.

S 53 1)

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \quad \text{d'où} \quad Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_1 \ , \ Q_1 > 0$$

2)

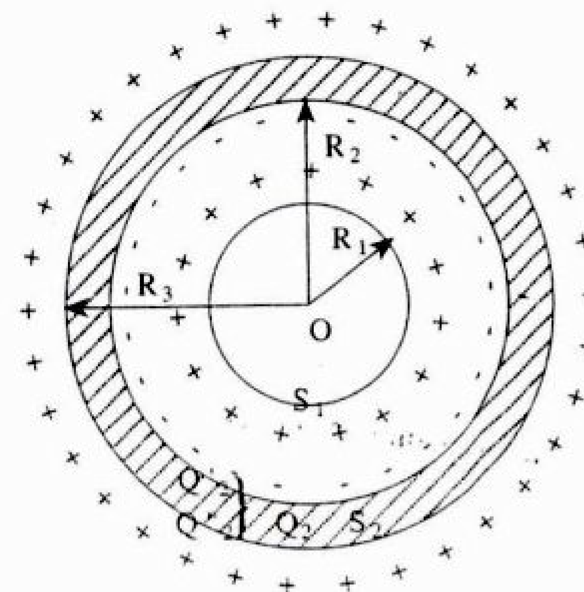


Figure 52

Q_1 : charge totale de S_1.

Q_2 : charge totale de S_2.

Q_2' : charge de la face interne de S_2.

Q_2'' : charge de la face externe de S_2.

$$Q_2 = Q_2' + Q_2''$$

influence totale :

$$Q_2' = -Q_1 \ , \ Q_2' < 0$$

S_2 initialement neutre et isolée, la charge se conserve : $Q_2 = 0$

$$Q_2 = 0 = Q_2' + Q_2'' \quad \text{et} \quad Q_2'' = -Q_2' = Q_1, \ Q_2'' > 0$$

3)

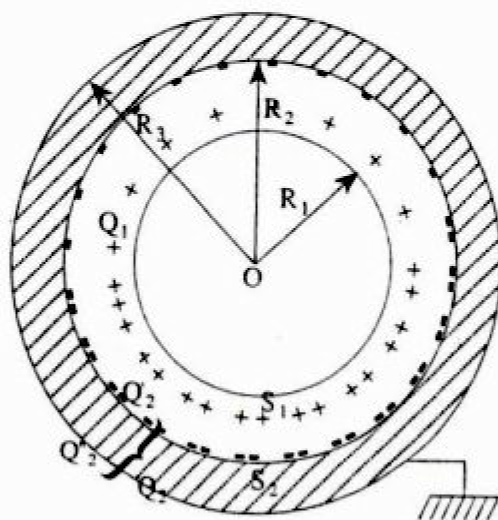


Figure 53

La sphère S_1 porte toujours la charge Q_1

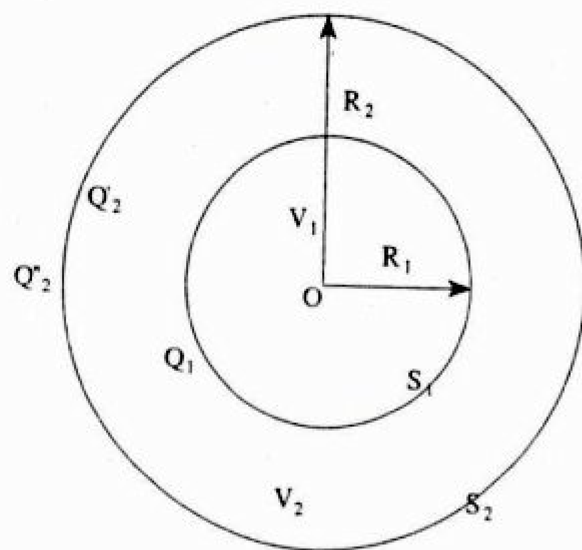
La sphère S_2 est reliée à la masse, donc $Q_2'' = 0$

Influence totale : $Q_2' = -Q_1$, $Q_2' < 0$

$$Q_2 = Q_2' + Q_2'' \quad \text{d'où} \quad Q_2 = -Q_1 , \; Q_2 < 0$$

La sphère (S_2) devient chargée.

S 54 1)



V_1 : le potentiel de la sphère S_1 est celui du point O

$$V_1 = V(o) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2' + Q_2''}{R_2}\right]$$

V_2 : le potentiel de la sphère S_2 s'obtient comme limite du potentiel à l'extérieur des sphères lorsque $r \to R_2$:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2' + Q_2''}{R_2}$$

Influence totale : $Q_1 = -Q_2'$

d'où :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2''}{R_2}$$

et finalement :

$$Q_2'' = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{R_1} + \frac{-Q_1 + Q_2''}{R_2}\right] = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] + V_2$$

On obtient :

$$Q_1 = (V_1 - V_2)\, 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} ,$$

2)

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}(V_1 - V_2) .$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 = Q_2' + Q_2''$$

$$= -4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}(V_1 - V_2) + 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2$$

$$C_{11} = \frac{Q_1}{V_1} \text{ avec } V_2 = 0 , \quad C_{11} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} > 0$$

$$V_1' = V_2' = \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_o R_1} = \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_o R_2}$$

$$Q_1' = Q_2' \cdot \frac{R_1}{R_2} \qquad ②$$

Remplaçons ② dans ①, on obtient :

$$Q_1' = (Q_1 + Q_2)\frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad Q_2' = (Q_1 + Q_2)\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

il s'ensuit que :

$$V_1' = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_o(R_1 + R_2)}$$

leur énergie :

$$W_0' = \frac{1}{2}\left[V_1'Q_1' + V_2'Q_2'\right] = \frac{V_1'}{2}\left[Q_1' + Q_2'\right]$$

et finalement :

$$W_0' = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)}$$

3) Théorème de Coulomb :

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

Les sphères sont reliées donc : $V_1 = V_2$ et $R_1\sigma_1 = R_2\sigma_2$

d'où en fin :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Si $R_1 < R_2$; $E_1 > E_2$.

S 57

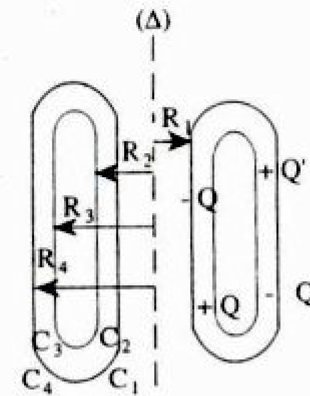


Figure 56

Le cylindre (C_1) porte la charge - Q. (C_2) porte la charge + Q par influence totale.

Le cylindre (C_3) est chargé avec la charge + Q'. (C_4) porte la charge - Q'.

L'ensemble C_1 et C_4 est une armature de potentiel :

$$V_{C_1} = V_{C_4}$$

et de charge - Q - Q'.

De même pour C_2 et C_3 :

$$V_{C_2} = V_{C_3}$$

et la charge est Q + Q'

La capacité du condensateur ainsi formé est :

$$C = \frac{Q + Q'}{V_{C_1} - V_{C_2}}$$

Cherchons alors $V_{C_1} - V_{C_2}$.

Appliquons le théorème de Gauss :

• $R_3 \le r < R_4$:

$$E = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 hr}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

d'où :

$$V_{C_3} - V_{C_4} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 h} \text{Log}\frac{R_4}{R_3}$$

$$C_{12} = \frac{Q_1}{V_2} \text{ avec } V_1 = 0, \quad C_{12} = -4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} < 0$$

$$C_{21} = \frac{Q_2}{V_1} \text{ avec } V_2 = 0, \quad C_{21} = -4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} = C_{12}$$

$$C_{22} = \frac{Q_2}{V_2} \text{ avec } V_1 = 0, \quad C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2^2}{R_2 - R_1} > 0$$

On vérifie facilement la relation : $C_{11} + C_{12} = 0$ (influence totale).

3) Le potentiel est constant à l'intérieur d'un conducteur. On peut donc considérer les deux sphères comme un seul conducteur en équilibre et chargé sur sa surface extérieure avec le charge Q_2'' .

$$V_2 = V(o) = \frac{Q_2''}{4\pi\,\varepsilon_o R_2} \text{ et } Q_2'' = 4\pi\,\varepsilon_o R_2 V_2$$

S 55 1)

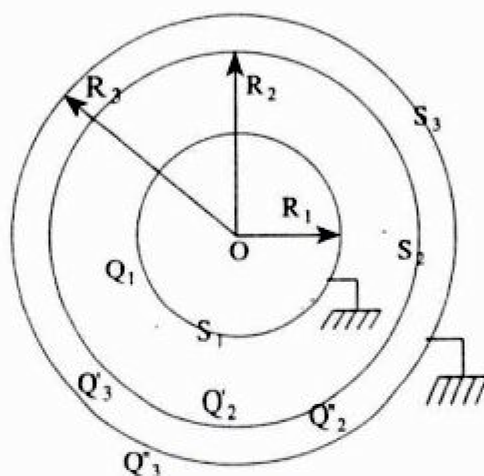


Figure 55

$$Q_3 = Q_3' + Q_3''$$

$$Q_2 = Q_2' + Q_2''$$

S_1 est chargée à cause du théorème des éléments

2) Par influence totale, on a : $Q_1 = - Q_2'$ et $Q_3' = - Q_2''$

S_3 est reliée à la terre d'où $Q_3'' = 0$

3)

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{Q_1 + Q_2' + Q_2''}{R_2} + \frac{Q_3' + Q_3''}{R_3}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{- Q_2' + Q_2' + Q_2''}{R_2} + \frac{- Q_2''}{R_3}\right]$$

$$V_2 = \frac{Q_2''}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right]$$

S 56 Le potentiel de la sphère (S_1) :

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_1}$$

Le potentiel de la sphère (S_2) :

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_2}$$

$$W_0 = \frac{1}{2}(V_1Q_1 + V_2Q_2) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_o}\left[\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2}\right]$$

2) Après le contact, la somme de leurs charges reste constante.

Q_1' et Q_2'' sont les charges de (S_1) et (S_2) après le contact $Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2$ ①

Leur potentiel est le même :

2)

$$Q_1 = Q_2 = \frac{V C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$Q_3 = Q_4 = \frac{V C_3 C_4}{C_3 + C_4}$$

VI. ENERGIE · ET · FORCES ELECTROSTATIQUES

ENONCES DES EXERCICES

E 60 Un condensateur est formé de deux armatures planes horizontales circulaires, parallèles entre elles, de rayon R et distantes de e. On charge le condensateur au moyen d'un générateur de tension U.

1) Calculer la charge Q prise par le condensateur.

2) Déterminer l'énergie W_C emmagasinée par le condensateur.

3) Quelle est la densité d'énergie W. En déduire l'intensité E du champ électrostatique.

4) Déterminer l'énergie W_G fournie par la source.

5) Chercher la force F qui s'exerce entre les armatures.

E 61 On considère une sphère de centre O et de rayon R, chargée avec une densité volumique uniforme ρ. Calculer l'énergie électrostatique.

E 62 Soit une sphère conductrice de centre O, de rayon R chargée avec la densité σ. Le plan AB divise cette sphère en deux calottes.

1) Calculer la force électrostatique $\vec{F}$ qui s'exerce sur les 2 calottes.

2) Le plan AB passe par O, calculer la nouvelle force $\vec{F}'$.

• $R_1 \leq r < R_2$:

$$E = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 hr}$$

et

$$V_{C_1} - V_{C_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \operatorname{Log} \frac{R_1}{R_2}$$

$$V_{C_1} - V_{C_2} = \frac{Q}{\dfrac{2\pi\varepsilon_0 h}{\operatorname{Log} \dfrac{R_1}{R_2}}} = \frac{Q'}{\dfrac{2\pi\varepsilon_0 h}{\operatorname{Log} \dfrac{R_3}{R_4}}}$$

$$= \frac{Q + Q'}{2\pi\varepsilon_0 h \left[\dfrac{1}{\operatorname{Log} \dfrac{R_1}{R_2}} + \dfrac{1}{\operatorname{Log} \dfrac{R_3}{R_4}}\right]}$$

Ce qui donne :

$$C = 2\pi\varepsilon_0 h \left[\frac{1}{\operatorname{Log} \dfrac{R_1}{R_2}} + \frac{1}{\operatorname{Log} \dfrac{R_3}{R_4}}\right]$$

$C = C_1 + C_2$, le système est équivalent à deux condensateurs en parallèle.

S 58 1)

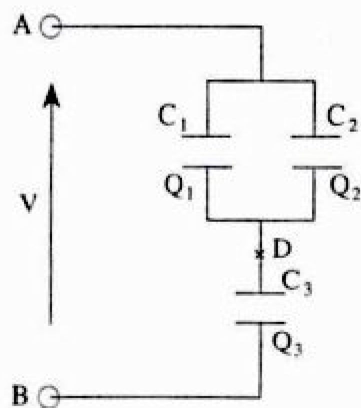


Figure 57

$$C_{AB} = \frac{(C_1 + C_2)\, C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

2) On a : $Q_3 = Q_1 + Q_2$

Par ailleurs

$$V = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_3}{C_{AB}}$$

et

$$Q_3 = V.C_{AB}$$

avec

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad \text{et} \quad Q_3 = Q_1 + Q_2$$

On trouve :

$$Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_3$$

La charge peut encore s'écrire :

$$Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V.C_{AB}$$

Il en est de même de

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V.C_{AB}$$

$$V_A - V_D = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$V_D - V_B = \frac{Q_3}{C_3}$$

$$V_A - V_B = \frac{Q_3}{C_{AB}} = V$$

S 59 1)

$$C_{AB} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}$$

SOLUTION DES EXERCICES

S 60 1)

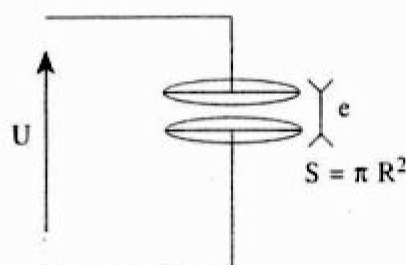


Figure 58

$$Q = C.U = \frac{\varepsilon_0 S}{e}.U$$

d'où

$$Q = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{e}.U$$

2)

$$W_C = \frac{1}{2}\,C.U^2,\; W_C = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{e}U^2$$

3)

$$W = \frac{W_C}{\tau}$$

τ : volume de l'espace inter - armatures :

$$\tau = \pi R^2 . e$$

$$W = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\left(\frac{U}{e}\right)^2 \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2 \quad \text{d'où} \quad E = \frac{U}{e}$$

4) $W_G = Q\,.\,U = 2\,.\,W_C$

$$W_G = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{e}.U^2$$

5)

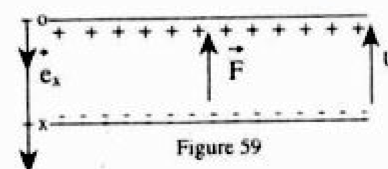


Figure 59

$$W_C(x) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{x}.U^2$$

U : constante

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\; W_C = \frac{d}{dx}\left(W_C\right)\vec{e}_x$$

$$\vec{F}_x = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U^2}{x^2}\,\vec{e}_x$$

pour x = e

$$\left\|\vec{F}\right\| = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{e^2}\,U^2$$

S 61

$$W = \frac{1}{2}\int_{\text{volume chargé}} \rho\, V\, d\tau = \frac{1}{2}\int_{\text{espace}} \varepsilon_0\, E^2\, d\tau$$

Le champ et le potentiel créés par une sphère uniformément chargée :

$$r>R : E_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\;;\; V_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

$$r<R : E_2 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\;;\; V_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{r^2}{3a^2}\right]$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{\text{volume chargé}} \rho V_2\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R \rho\,.\,\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{r^2}{3a^2}\right].\,4\pi\, r^2\, dr$$

$$W = \frac{4}{15}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}\pi R^5$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{espace}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{2}\int_0^R \varepsilon_0 E_2^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_R^\infty \varepsilon_0 E_1^2 d\tau$$

$$W = \frac{4}{15}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}\pi R^5$$

S 62

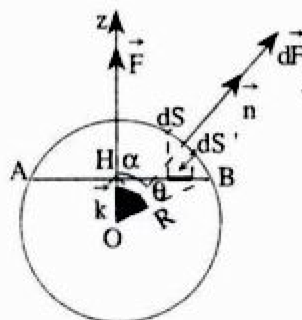


Figure 60

1) Un élément dS en M est soumis à la force de pression électrostatique :

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS\vec{n} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} > 0$$

$d\vec{F}$ est normale à dS et dirigée vers l'extérieur. Le système des forces électrostatiques présentes la symétrie de révolution autour de l'axe Oz, la résultante est portée par l'axe Oz et tend à éloigner les 2 calottes :

$$\vec{F} = F\vec{k} \ , \ F = \iint dF_z \quad (F > 0)$$

$$dF_z = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \cos\alpha = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS'$$

dS' est la projection de dS sur AB.

S' est la surface du grand cercle qui limite une calotte de

$$F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\iint dS' = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi (R \sin \theta)^2$$

$$F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi R^2 \sin^2\theta$$

2) Le plan AB passe par O, donc :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad F = \frac{\sigma^2 \pi R^2}{2\varepsilon_0}$$

Le potentiel

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

alors :

$$F = \frac{\pi \varepsilon_0 V^2}{2}$$